Soit le polynôme $P(x) = 18x^4 + ax^3 + bx^2 + 5x + 3$.

1/ Trouver a et b réels tels que $2x^2 - 5x - 3$ soit factorisable dans $P(x)$.

Recherche des racines de $2x^2 - 5x - 3 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = 49 \Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{1}{2}$.

$P(x)$ admet la factorisation de $2x^2 - 5x - 3$ si et seulement si $P(3) = 0$ et $P(-\frac{1}{2}) = 0$.

$P(3) = 0 \Leftrightarrow 18(3^4) + a(3^3) + b(3^2) + 5(3) + 3 = 0 \Leftrightarrow 18(3^3) + a(3^2) + b(3) + 5 + 1 = 0 \Leftrightarrow 9a + 3b = -492$,
Soit : $3a + b = -164$.

$P(-\frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow 18(-\frac{1}{2})^4 + a(-\frac{1}{2})^3 + b(-\frac{1}{2})^2 + 5(-\frac{1}{2}) + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{18}{16} - \frac{a}{8} + \frac{b}{4} - \frac{5}{2} + 3 = 0$,

$\frac{9}{8} - \frac{a}{8} + \frac{b}{4} - \frac{5}{2} + 3 = 0 \Leftrightarrow 9 - a + 2b - 20 + 24 = 0 \Leftrightarrow -a + 2b = -13$.

$\begin{cases} 3a + b = -164 \\ -a + 2b = -13 \end{cases} \Rightarrow a = -45$ et $b = -29$. D'où : $P(x) = 18x^4 - 45x^3 - 29x^2 + 5x + 3$.

Donner la factorisation de $P(x)$.

$P(x) = (2x^2 - 5x - 3)(Ax^2 + Bx + C)$,

En développant :

$P(x) = 2Ax^4 - 5Ax^3 - 3Ax^2 + 2Bx^3 - 5Bx^2 - 3Bx + 2Cx^2 - 5Cx - 3C$,

$P(x) = 2Ax^4 + (2B - 5A)x^3 + (2C - 3A - 5B)x^2 + (-3B - 5C) - 3C$.

En *identifiant* à l'écriture de $P(x)$, on obtient : $\begin{cases} 2A = 18 \Leftrightarrow A = 9 \\ -3C = 3 \Leftrightarrow C = -1 \end{cases}$,

En reportant dans les deux derniers coefficients non utilisés :

$2B - 5A = -45 \Leftrightarrow 2B - 45 = -45 \Leftrightarrow B = 0$

$2C - 3A - 5B = -29 \Leftrightarrow -2 - 27 - 0 = -29$, ce qui confirme la validité des résultats : $P(x) = (2x^2 - 5x - 3)(9x^2 - 1)$.

2/ Résoudre $P(x) < 0$.

Recherche des racines de $2x^2 - 5x - 3 = 0$: $\Delta = b^2 - 4ac = 49 \Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{1}{2}$.

Recherche des racines de $9x^2 - 1 = 0$: $9x^2 = 1 \Rightarrow 3x = 1$ ou $3x = -1 \Leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{3}$ et $x_4 = +\frac{1}{3}$.

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$2x^2 - 5x - 3$		+	0	-	|	-	|	-	0	+	
$9x^2 - 1$		+	|	+	0	-	0	+	|	+	
R		**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	

$S =]-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3} ; 3[$.