1/ Calculer $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$ **.**

Forme indéterminée $\infty - \infty$:

$$\frac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \frac{(\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1})(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1})}{x(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1})} = \frac{(2x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)}{x(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1})}$$

$$\frac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \frac{x^2 - x}{x(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1})} = \frac{x - 1}{(\sqrt{2x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + x + 1})}$$

Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$:

Comme un polynôme se comporte comme le rapport de ses plus hauts degrés, on conclue :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2} + \sqrt{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x\sqrt{2} + x} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1 .$$

2/ Calculer $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ **.**

Forme indéterminée $\frac{0}{0}$:

Utilisons la quantité conjuguée du dénominateur ,

$$\frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(x^2 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x^2\sqrt{x} + x^2 - x - \sqrt{x}}{x - 1} = \frac{(x^2\sqrt{x} - \sqrt{x}) + (x^2 - x)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x}(x^2 - 1) + x(x - 1)}{x - 1} = (x + 1)\sqrt{x} + x .$$

Donc : $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \to 1} [(x + 1)\sqrt{x} + x] = 3$, par continuité.