Soit la suite x définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = -\frac{1}{3}x_n + 4$, et la suite y telle que $y_n = x_n - 3$.

1/ Prouver que y est une suite géométrique, dont on donnera la raison et le premier terme.

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1} - 3}{x_n - 3} = \frac{(-\frac{1}{3}x_n + 4) - 3}{x_n - 3} = \frac{-x_n + 3}{3(x_n - 3)} = -\frac{1}{3} .$$

$$y_0 = -\frac{1}{3}x_0 + 3 = -\frac{4}{3} + 3 = +\frac{5}{3} .$$

La suite y est géométrique, de raison $q = -\frac{1}{3}$, et de premier terme $y_0 = +\frac{5}{3}$.

2/ Exprimer y_n en fonction de n .

$$y \textit{ géométrique } \Leftrightarrow y_n = y_0\, q^n = -\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^n .$$

On remarquera que $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

3/ Calculer $S = y_0 + y_1 + ... + y_n$ en fonction de n .

$$y \textit{ géométrique } \Rightarrow S = y_0 + y_1 + ... + y_n = y_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -\frac{1}{3} . \frac{1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{3}}$$

$S = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}\right]$, où $n + 1$ est le nombre de termes.

On remarquera que $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} S = +\frac{1}{2}$.

En déduire $S' = x_0 + x_1 + ... + x_n$.

$x_p = y_p + 3 \Rightarrow S' = x_0 + x_1 + ... + x_n = (y_0 + y_1 + ... + y_n) + (n + 1)(3)$, puisqu'il y a $n + 1$ termes dans cette somme.

$$S' = x_0 + x_1 + ... + x_n = \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}\right] + 3(n + 1) = 3n + \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} .$$

On remarquera que $\lim\limits_{n \to +\infty} S' = +\infty$.