Soit $f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$ pour tout x réel différent de -3 .

1/ Déterminer a , b réels tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x+3}$.

$$f(x) = a + \frac{b}{x+3} = \frac{a(x+3)+b}{x+3} = \frac{ax+(3a+b)}{x+3} = \frac{2x-1}{x+3} \quad \text{pour tout } x \neq -3.$$

Identifions les numérateurs : $a = 2$ et $3a + b = -1$, dont on déduit $b = -7$. D'où $f(x) = 2 - \dfrac{7}{x+3}$.

2/ Sans utiliser la notion de dérivée, en séparant le domaine en sous-domaines,] -∞ ; -3[et]-3 ; +∞[, étudier le sens de variation de f . (Les dérivées s'étudient en Première)

$$x' < x'' < -3 \Leftrightarrow x'+3 < x''+3 < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x''+3} < \frac{1}{x'+3} < 0 \Leftrightarrow 0 < -\frac{7}{x'+3} < -\frac{7}{x''+3} ,$$

d'où : $x' < x'' < -3 \Rightarrow f(x') < f(x'')$. La fonction f est croissante sur]-∞ ; -3 [.

De même : $-3 < x' < x'' \Leftrightarrow 0 < x'+3 < x''+3 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{x''+3} < \dfrac{1}{x'+3} \Leftrightarrow -\dfrac{7}{x'+3} < -\dfrac{7}{x''+3} < 0$,

Donc : $-3 < x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'')$. La fonction f est également croissante sur]-3 ; +∞ [.

3/ Connaissant le graphe de $g : x \longmapsto g(x) = \dfrac{1}{x}$, expliquer comment en déduire celui de f .

- Pour déduire le graphe de $g_1(x) = \dfrac{1}{x+3}$ de celui de l'hyperbole d'équation $g(x) = \dfrac{1}{x}$, il faut effectuer une *translation horizontale* de -3 , donc selon l'axe des abscisses.

- Pour déduire le graphe de $g_2(x) = -\dfrac{7}{x+3}$ de celui de $g_1(x)$, il faut multiplier les ordonnées de celle-ci par -7.

- Pour déduire le graphe de $f(x) = 2 - \dfrac{7}{x+3}$ de celui de $g_2(x)$, il faut effectuer une *translation verticale* de +2 , donc selon l'axe des ordonnées.