1/ Soient a et b deux entiers naturels dont la somme et le produit ont pour $PGCD$ le carré d'un nombre premier p .

a) Montrer que p^2 divise a^2 (on pourra remarquer que $a^2 = a(a+b) - ab$).

Soit $PGCD\,(a+b\,;ab) = p^2$, avec p nombre premier.

$p^2 \mid a+b$ et $p^2 \mid ab \Rightarrow p^2 \mid a(a+b) - ab \Rightarrow p^2 \mid a^2$.

En déduire que p divise a et que p divise b .

$p \mid a^2 \Rightarrow p \mid a^2$.

Tout nombre premier est premier avec un entier qu'il ne divise pas exactement.

Si p ne divise pas exactement a , il est premier avec a .

Dans ce cas, d'après le Théorème de Gauss, $p \mid a \times a$ avec $PGCD\,(p\,;a) = 1$, donc p divise a , d'où contradiction, ce qui prouve effectivement que $p \mid a$.

$p^2 \mid a+b \Rightarrow p \mid a+b$, or $p \mid a$, donc $p \mid (a+b) - a \Rightarrow p \mid b$.

b) Démontrer que $PGCD(a\,;b)$ est soit p , soit p^2 .

Nous avons vu que $p \mid a$ et $p \mid b$, donc $p \mid PGCD\,(a\,;b)$.

$PGCD\,(a\,;b) = \lambda p \Rightarrow a = \lambda p a'$ et $b = \lambda p b'$ avec $PGCD\,(a'\,;b') = 1$,

d'où : $a + b = \lambda p(a' + b')$ et $ab = \lambda^2 p^2 a'b'$.

λp divise simultanément $a+b$ et ab , donc $\lambda p \mid PGCD\,(a+b\,;ab) \Rightarrow \lambda p \mid p^2$, dont on déduit $\lambda \mid p$.

Comme p est premier, on déduit $\lambda = 1$ ou $\lambda = p$, d'où $PGCD\,(a\,;b) = p$ ou $PGCD\,(a\,;b) = p^2$.

2/ On cherche à déterminer les entiers naturels a et b tels que : $PGCD(a+b\,;ab) = 49$ et $PPCM(a\,;b) = 231$.

a) Soient a et b deux tels entiers. Montrer que $PGCD(a\,;b) = 7$.

D'après 1/ , $PGCD(a+b\,;ab) = 49 = 7^2 \Rightarrow PGCD\,(a\,;b) = 7$ ou $PGCD\,(a\,;b) = 49$.

On sait que $PPCM\,(a\,;b)$ est multiple de $PGCD\,(a\,;b)$ puisque le PPCM est multiple de a ou b , alors que le PGCD est diviseur de a et de b .

Comme 7 divise bien 231, alors que 49 n'est pas diviseur de 231 , on déduit $PGCD\,(a\,;b) = 7$.

b) Quelles sont les solutions au problème posé.

$PGCD\,(a\,;b) = \delta = 7 \Rightarrow a = 7a'$ et $b = 7b'$ avec $PGCD\,(a'\,;b') = 1$.

$PPCM\,(a\,;b) = \mu = \delta a'b' = 231 \Rightarrow 7a'b' = 231 \Rightarrow a'b' = 33$.

Comme a' et b' sont premiers entre eux, on déduit :

$a' = 1$, $b' = 33 \Rightarrow (a\,;b) = (7\,;231)$, $a' = 3$, $b' = 11 \Rightarrow (a\,;b) = (21\,;77)$

$a' = 11$, $b' = 7 \Rightarrow (a\,;b) = (77\,;21)$, $a' = 33$, $b' = 1 \Rightarrow (a\,;b) = (231\,;7)$.