1/ Vérifier que $\dfrac{4}{x(x^2-4)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2(x+2)} + \dfrac{1}{2(x-2)}$.

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+2)} + \frac{1}{2(x-2)} = \frac{-2(x+2)(x-2) + x(x-2) + x(x+2)}{2x(x+2)(x-2)} = \frac{-2x^2 + 8 + x^2 - 2x + x^2 + 2x}{2x(x^2-4)} = \frac{4}{x(x^2-4)} .$$

2/ Trouver une primitive sur] 2 ; +∞ [de f telle que $f(x) = \dfrac{4}{x(x^2-4)}$.

$x > 2 \Rightarrow |x| = x$, $|x-2| = x - 2$, $|x+2| = x+2$. Par ailleurs, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$.

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+2)} + \frac{1}{2(x-2)} \Rightarrow F(x) = -\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+2) + \frac{1}{2}\ln(x-2) = \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)(x+2)}{x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2-4}{x^2} .$$

3/ Par intégration par parties, calculer $I = \displaystyle\int_3^4 \frac{8x \ln x}{(x^2-4)^2}\,dx$.

On sait que $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$, donc que $-\dfrac{4}{x^2-4}$ a pour dérivée $\dfrac{8x}{(x^2-4)^2}$.

Posons $\begin{cases} u' = \dfrac{8x}{(x^2-4)^2} \Rightarrow u = -\dfrac{4}{x^2-4} \\ v = \ln x \Rightarrow v' = \dfrac{1}{x} \end{cases}$. On sait que $\displaystyle\int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,dx$.

$$I = \left[-\frac{4\ln x}{x^2-4}\right]_3^4 + \int_3^4 \frac{4}{x(x^2-4)}\,dx = \left[-\frac{4\ln x}{x^2-4} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2-4}{x^2}\right]_3^4 = -\frac{5}{3}\ln 2 + \frac{23}{10}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5 \approx 0,566844.$$