

Soit un triangle quelconque (ABC) et A' , B' , C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

Démontrer que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

$$\text{Calculons } 2(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) = 2\overrightarrow{AA'} + 2\overrightarrow{BB'} + 2\overrightarrow{CC'}.$$

$$A' \text{ est milieu de } [BC] \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},$$

$$B' \text{ est milieu de } [AC] \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC},$$

$$C' \text{ est milieu de } [AB] \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}.$$

$$\text{D'où : } 2(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB},$$

$$\text{Comme : } \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}, \text{ on déduit : } 2(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) = \vec{0},$$

$$\text{Conclusion : } \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}.$$