On considère les intégrales : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ **et** $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$ **.**

1 -a) Quelle est la dérivée de la fonction tangente ?

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, or $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} \Rightarrow \tan' x = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

b) Calculer *I* .

$I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = [\tan x]_0^{\pi/4} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1$.

2 -a) Soit la fonction $f : [0 ; \frac{\pi}{4}] \longmapsto \mathbb{R}$ **définie par** $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ **.**

Démontrer que *f* est dérivable sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ **et que, pour tout *x* de cet intervalle,** $f'(x) = \dfrac{3}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$ **.**

f est définie, continue et dérivable sur $[0 ; \frac{\pi}{4}]$ en qualité de rapport de fonctions définies, continues et dérivables sur cet intervalle.

$f'(x) = \dfrac{\cos x.\cos^3 x - 3\cos^2 x.(-\sin x).\sin x}{\cos^6 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{3\sin^2 x}{\cos^4 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{3(1 - \cos^2 x)}{\cos^4 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{3}{\cos^4 x} - \dfrac{3}{\cos^2 x}$

soit : $f'(x) = \dfrac{3}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$.

Déduire du calcul précédent une relation entre *I* et *J* , puis calculer *J* .

On déduit du résultat précédent :

$\displaystyle\int_0^{\pi/4} f'(x)\,dx = 3\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx - 2\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$, soit $f(\frac{\pi}{4}) - f(0) = 3J - 2I$.

$3J - 2I = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos^3(\frac{\pi}{4})} = 2$, d'où , sachant $I = 1$:

$J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \frac{4}{3}$.