1/ Soit $P(x)$ un polynôme tel que $a \in \mathbb{R}$ soit solution de $P(x) - x = 0$.
Montrer qu'alors, a est solution de $P[P(x)] - x = 0$.

a solution de $P(x) - x = 0 \Leftrightarrow P(a) = a$.

De ce fait , $P[P(a)] = P(a) = a \Leftrightarrow P[P(a)] - a = 0 \Leftrightarrow a$ racine de $P[P(x)] - x = 0$.

2/ Soit $P(x) = x^2 - 3x - 2$.

a) Calculer $P[P(x)]$.

$P[P(x)] = [P(x)]^2 - 3P(x) - 2 = (x^2 - 3x - 2)^2 - 3(x^2 - 3x - 2) - 2 = x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 - 4x^2 + 12x - 3x^2 + 9x + 6 - 2.$

$P[P(x)] = x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 21x + 8$.

b) Vérifier que l'équation $P[P(x)] - x = 0$ équivaut à l'équation $E \mid x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 20x + 8 = 0$.

$P[P(x)] - x = 0 \Leftrightarrow (x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 21x + 8) - x = 0 \Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 20x + 8 = 0$.

3/ Résoudre $P(x) = x$. On notera α et β ses solutions.

$P(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 8 = 24 = 4\times 6$. Les racines sont $\begin{cases} \alpha = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 2 + \sqrt{6} \\ \beta = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 2 - \sqrt{6} \end{cases}$.

4/ En utilisant la question 1/ , montrer que $P[P(x)] - x = (x - \alpha)(x - \beta)(ax^2 + bx + c)$, où a , b , c sont des nombres réels à déterminer.

D'après 1/ , $P(\alpha) - \alpha = 0 \Rightarrow P[P(\alpha)] - \alpha = 0 \Rightarrow (x - \alpha)$ se factorise dans $P[P(x)] - x$.

De même : $P(\beta) - \beta = 0 \Rightarrow P[P(\beta)] - \beta = 0 \Rightarrow (x - \beta)$ se factorise dans $P[P(x)] - x$.

Comme $P[P(x)] - x = x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 20x + 8$, polynôme du *quatrième* degré, on déduit la factorisation :

$P[P(x)] - x = (x - \alpha)(x - \beta)(ax^2 + bx + c) = (x^2 - 4x - 2)(ax^2 + bx + c)$.

Développons pour *identifier* les deux présentations de $P[P(x)] - x$:

$P[P(x)] - x = (x^2 - 4x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^4 + (b - 4a)x^3 + (c - 4b - 2a)x^2 + (-4c - 2b)x - 2c$

$P[P(x)] - x = x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 20x + 8$, pour tout x réel .

d'où l'identification $\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -6 \Rightarrow b = -2 \\ c - 4b - 2a = 2 \Rightarrow c = -4 \\ -4c - 2b = 20 \text{ compatible} \\ -2c = 8 \text{ compatible} \end{cases}$.

Donc , $[P(x)] - x = x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 20x + 8 = (x - \alpha)(x - \beta)(x^2 - 2x - 4)$.

5/ En déduire la résolution de l'équation (E) .

$x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 20x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)(x - \beta)(x^2 - 2x - 4) = 0$.

Or, $x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 4 + 16 = 20 = 4\times 5$. Les racines sont $\begin{cases} \gamma = 1 + \sqrt{5} \\ \delta = 1 - \sqrt{5} \end{cases}$.

Les quatre racines de $x^4 - 6x^3 + 2x^2 + 20x + 8 = 0$ sont $\{ \alpha ; \beta ; \gamma ; \delta \}$;

$\alpha = 2 + \sqrt{6}$, $\beta = 2 - \sqrt{6}$, $\gamma = 1 + \sqrt{5}$, $\delta = 1 - \sqrt{5}$.