

Soit un triangle quelconque (ABC) du plan. Soit I le milieu du côté $[BC]$.

Soit les points K , tel que $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$, et L tel que $\overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LB} - 2\overrightarrow{LC} = \vec{0}$.

Démontrer que les points (A, L, K, I) sont alignés.

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}),$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

On sait que : I milieu de $[BC] \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, d'où l'alignement des points (A, K, I) .

$$\text{De même : } \overrightarrow{LA} - 2\overrightarrow{LB} - 2\overrightarrow{LC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{LA} = 2(\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC}),$$

$$\text{Or, } I \text{ milieu de } [BC] \Leftrightarrow 2\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC}.$$

On déduit $\overrightarrow{LA} = 4\overrightarrow{LI}$, ce qui prouve l'alignement des points (A, L, I) .

On conclue l'alignement des quatre points (A, L, K, I) .