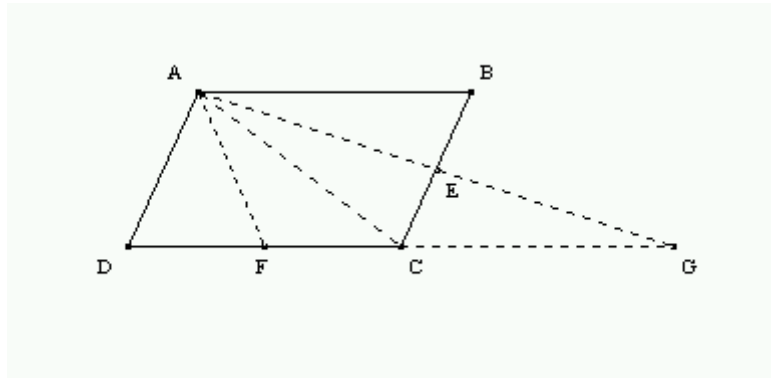


Soit $(ABCD)$ un parallélogramme du plan.

Le point E est le milieu du segment $[BC]$, F celui de $[CD]$, et G est le symétrique de D par rapport au point C .

1/ Démontrer que les points (A, E, G) sont alignés.



$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}. \text{ Or, } (ABCD) \text{ parallélogramme implique } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.$$

$$\text{Par ailleurs, } G \text{ symétrique de } D \text{ par rapport à } C \Leftrightarrow C \text{ milieu de } [DG] \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DG}.$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}.$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} \text{ prouve que les points } (A, E, G) \text{ sont alignés, et que } E \text{ est le milieu de } [AG].$$

2/ Démontrer que $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF})$.

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}.$$

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} \text{ puisque } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.$$

$$\text{On obtient bien : } \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}).$$