Soit $f : x \longmapsto f(x) = 2\cos^2 x + \sin 2x$.

a) Déterminer la période de la fonction f .

On appelle *période* d'une fonction f, la plus petite quantité strictement positive T telle que : $f(x+T) = f(T)$ pour tout x du domaine de définition de f.

Il est préférable de modifier la présentation de f, afin d'éliminer le carré :

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

D'où : $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \Rightarrow f(x) = 1 + \sin 2x + \cos 2x$.

$\cos(ax+b)$ et $\sin(ax+b)$ admettent $T = \frac{2\pi}{\lvert a \rvert}$ pour période, alors que celle de $\tan(ax+b)$ est $\frac{\pi}{\lvert a \rvert}$.

La période de f est donc $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. (on verra plus loin une méthode de démonstration plus théorique)

b) Montrer que la droite verticale $D \mid x = +\frac{\pi}{8}$ est axe de symétrie de (C) , courbe représentative de f .

$D \mid x = a$ axe de symétrie de $(C) \Leftrightarrow f(2a - x) = f(x)$ pour tout x du domaine.

$f(2a - x) = f(\frac{\pi}{4} - x) = 1 + \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) + \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = 1 + \sin 2x + \cos 2x = f(x)$, puisque $\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos a$.

c) Prouver que $f'(x) = 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$.

On sait que $(\cos u)' = -u'\sin u$ et $(\sin u)' = u'\cos u$.

$f(x) = 1 + \sin 2x + \cos 2x \Rightarrow f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin 2x = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x)$

$f'(x) = 2\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4}.\cos 2x - \cos\frac{\pi}{4}.\sin x) = 2\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - 2x)$, puisque $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

Remarque :

$f(x) = 1 + \sin 2x + \cos 2x = 1 + \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x) = 1 + \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}.\cos 2x + \sin\frac{\pi}{4}.\sin 2x)$

$f(x) = 1 + \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$ puisque $\cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Recherche de la période : $f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow 1 + \sqrt{2}\cos[\frac{\pi}{4} - 2(x + T)] = 1 + \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$.

On sait que : $\cos X = \cos A \Leftrightarrow \begin{cases} X \equiv A\ [2\pi] \\ X \equiv -A\ [2\pi] \end{cases}$

$$\cos[\frac{\pi}{4} - 2(x + T)] = \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - 2(x + T) \equiv \frac{\pi}{4} - 2x\ [2\pi] \\ \frac{\pi}{4} - 2(x + T) \equiv -\frac{\pi}{4} + 2x\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2T \equiv 0\ [2\pi] \Leftrightarrow T \equiv 0\ [\pi] \\ 2T \equiv \frac{\pi}{2} - 4x\ [\pi] \end{cases} .$$

Le second cas n'est pas recevable, puisque T dépendrait de x .

Dans le premier cas, la première valeur positive non nulle de T est π , période de f .