a) Résoudre le système $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 8a+4b+2c=3 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases}$**, en détaillant les calculs.**

$\begin{matrix} -2L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} -2a-2b-2c=0 \\ 8a+4b+2c=3 \end{cases} \Rightarrow \; 6a+2b=3$.

$\begin{matrix} -L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} -a-b-c=0 \\ 9a+3b+c=5 \end{cases} \Rightarrow \; 8a+2b=5$.

$\begin{cases} 6a+2b=3 \\ 8a+2b=5 \end{cases} \Rightarrow \; \begin{matrix} -L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} -6a-2b=-3 \\ 8a+2b=5 \end{cases} \Rightarrow \; 2a=2 \; \Rightarrow \; a=1$ et $b=-\dfrac{3}{2}$.

En reportant dans $a+b+c=0$, on obtient $c=-a-b$, soit $c=+\dfrac{1}{2}$.

Le triplet solution du système est $(a\,,\,b\,,\,c)=(\,1\,;\,-\dfrac{3}{2}\,;\,+\dfrac{1}{2}\,)$.

b) Déterminer les réels a **,** b **et** c **tels que la parabole** (P) **d'équation** $y=ax^2+bx+c$ **passe par les points** $A\,(1\,;\,0)$ **,** $B\,(2\,;\,\dfrac{3}{2})$ **et** $C\,(3\,;\,5)$ **.**

$A\,(1\,;\,0) \in (P) \Leftrightarrow 0=a.1^2+b.1+c \;\Leftrightarrow\; a+b+c=0$.

$B\,(2\,;\,\dfrac{3}{2}) \in (P) \Leftrightarrow \dfrac{3}{2}=a.2^2+b.2+c \Leftrightarrow 4a+2b+c=\dfrac{3}{2} \;\Leftrightarrow\; 8a+4b+2c=3$.

$C\,(3\,;\,5) \in (P) \Leftrightarrow 5=a.3^2+b.3+c \Leftrightarrow 9a+3b+c=5$.

On retrouve le système précédent, donc $(a\,,\,b\,,\,c)=(\,1\,;\,-\dfrac{3}{2}\,;\,+\dfrac{1}{2}\,)$.

L'équation de la parabole (P) est : $y=f(x)=x^2-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

c) Déterminer les coordonnées du sommet S **de cette parabole.**

L'abscisse du sommet d'une parabole annule la dérivée de la fonction :

$f\,'(x)=2x-\dfrac{3}{2} \;\Rightarrow\; x=+\dfrac{3}{4}$. L'ordonnée du sommet est $y=f(\dfrac{3}{4})=(\dfrac{3}{4})^2-(\dfrac{3}{2})(\dfrac{3}{4})+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{16}$.

Le sommet de la parabole (P) est $S\,(\dfrac{3}{4}\,;\,-\dfrac{1}{16})$.