Soit $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x - 1}{(x-1)^2}$

- Déterminer a , b , c réels tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x-1)^2}$:

$$f(x) = \frac{ax(x-1)^2 + b(x-1)^2 + c}{(x-1)^2} = \frac{ax(x^2 - 2x + 1) + b(x^2 - 2x + 1) + c}{(x-1)^2} = \frac{ax^3 + (b-2a)x^2 + (a-2b)x + (b+c)}{(x-1)^2}.$$

Identifions les numérateurs :

$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -1 \\ a - 2b = -1 \\ b + c = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 , b = 1 , c = -2$, après avoir vérifié la *compatibilité* des quatre équations.

Donc : $f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{(x-1)^2}$.

- En déduire la primitive de f , nulle en $x = 0$:

On sait que $\dfrac{1}{u}$ admet pour dérivée $-\dfrac{u'}{u^2}$. Donc , la dérivée de $\dfrac{1}{x-1}$ est $-\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

En conséquence, les primitives de f sont : $F_k(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{2}{x-1} + k$.

Imposons $F_k(0) = 0$, soit $-2 + k = 0 \Rightarrow k = +2$.

La primitive recherchée est : $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{2}{x-1} + 2$.