Soit (C) la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{9x^2+6x+5}$.

On considère les droites $D_1 \mid y=3x+1$ et $D_2 \mid y=-3x-1$.

a) Montrer que ces droites D_1 et D_2 sont asymptotes à la courbe (C) .

> La droite $D \mid y=ax+b$ est asymptote à G_f, graphe de $f(x)$, aux infinis,
> si et seulement si $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$.

- Si $x\to+\infty$, on constate que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(3x+1)]$ est indéterminé, de forme : $\infty - \infty$.

$$f(x)-(3x+1)=\sqrt{9x^2+6x+5}-(3x+1)=\frac{(9x^2+6x+5)-(3x+1)^2}{\sqrt{9x^2+6x+5}+(3x+1)}=\frac{4}{\sqrt{9x^2+6x+5}+(3x+1)}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{9x^2+6x+5}+(3x+1)]=+\infty$, on déduit $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(3x+1)]=0$.

La droite D_1 est asymptote à (C) lorsque x tend vers $+\infty$.

- Si $x\to-\infty$, on constate que $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-3x-1)]$ est indéterminé, de forme : $-\infty+\infty$.

$$f(x)-(-3x-1)=\sqrt{9x^2+6x+5}+(3x+1)=\frac{(9x^2+6x+5)-(3x+1)^2}{\sqrt{9x^2+6x+5}-(3x+1)}=\frac{4}{\sqrt{9x^2+6x+5}-(3x+1)}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}[\sqrt{9x^2+6x+5}-(3x+1)]=+\infty$, on déduit $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-3x-1)]=0$.

La droite D_2 est asymptote à (C) lorsque x tend vers $-\infty$.

b) Montrer que pour tout x réel : $9x^2+6x+5>(3x+1)^2\geq 0$.

A l'évidence $(3x+1)^2\geq 0$. De plus : $(9x^2+6x+5)-(3x+1)^2=4>0$ prouve $9x^2+6x+5>(3x+1)^2$.

On conclue bien : $\mathbf{9x^2+6x+5>(3x+1)^2\geq 0}$ **.**

c) En déduire les positions relatives de (C) par rapport à D_1 et D_2 .

D'après le résultat précédent : $9x^2+6x+5>(3x+1)^2 \Leftrightarrow (9x^2+6x+5)-(3x+1)^2>0$

soit : $[\sqrt{9x^2+6x+5}-(3x+1)][\sqrt{9x^2+6x+5}+(3x+1)]>0$.

ou encore : $[\sqrt{9x^2+6x+5}-(3x+1)][\sqrt{9x^2+6x+5}-(-3x-1)]>0$.

Donc $f(x)-(3x+1)$ et $f(x)-(-3x-1)$ sont **partout** de même signe. (1)

<u>Positions relatives de (C) et $D_1 \mid y=3x+1$:</u>

$f(x)=\sqrt{9x^2+6x+5}>0$, pour tout x réel.

- Si $3x+1\leq 0$, alors $f(x)-(3x+1)>0$.
- Si $3x+1>0$, soit $-3x-1<0$, on déduit $f(x)-(-3x-1)>0$, soit $f(x)-(3x+1)>0$ d'après (1).

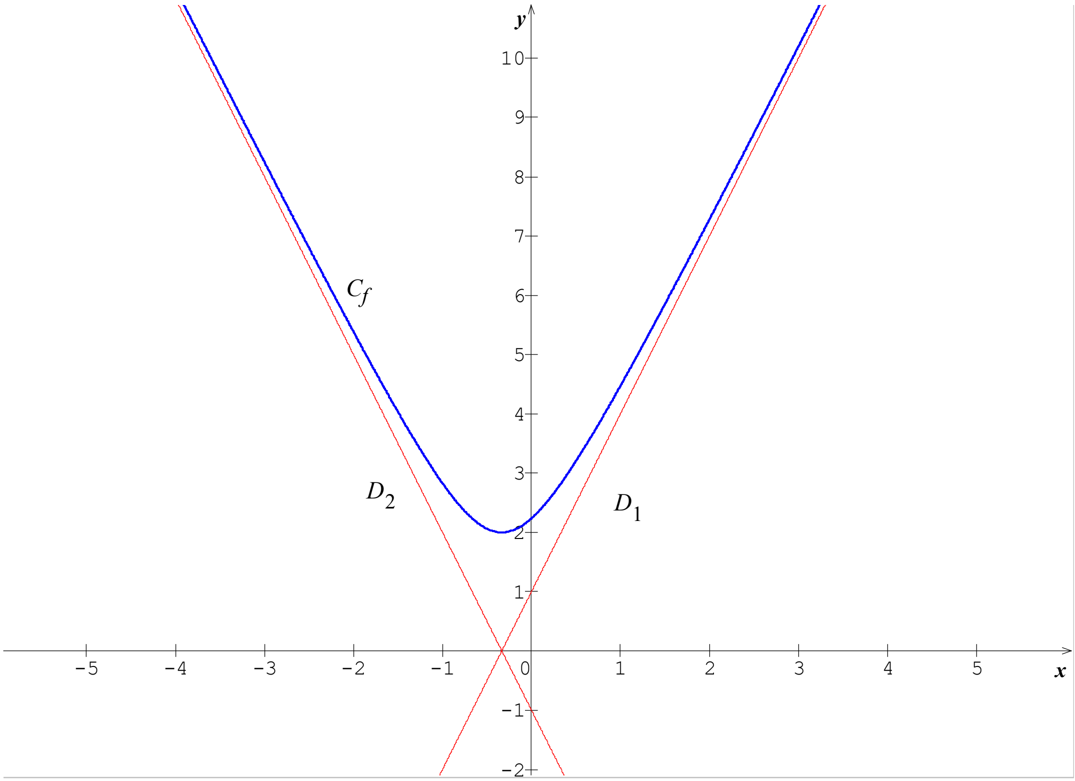
On conclue $f(x)-(3x+1)>0$ pour tout x réel, soit (C) partout au dessus de D_1 .

<u>Positions relatives de (C) et $D_2 \mid y=-3x-1$:</u>

D'après (1) , $f(x)-(-3x-1)$ est partout du signe de $f(x)-(3x+1)$.

On vient de voir que $f(x)-(3x+1)>0$ pour tout x réel, d'où $f(x)-(-3x-1)>0$ pour tout x réel.

(C) partout au dessus de D_2 .


y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x
C_f
D_2
D_1