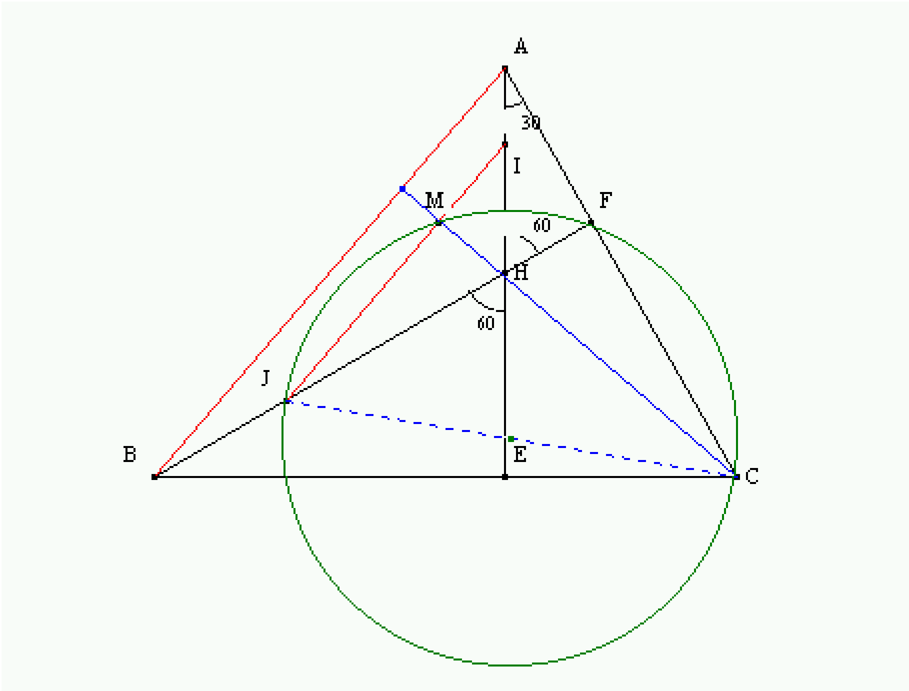

(BEH) est un triangle rectangle en E .

H est le milieu de $[AE]$.

Les points B , H , F sont alignés.

On donne : $\widehat{BHE} = 60°$; $\widehat{HAF} = 30°$ et $HB = 10$ cm .

1 - a) Démontrer que $HE = 5$ cm .

On pourra utiliser les informations suivantes : sin 60° = 0,866 ; cos 60° = 0,5 ; tan 60° = 1,732 .

$\cos \widehat{BHE} = \cos 60° = \dfrac{HE}{HB} = \dfrac{1}{2}$, d'où $HE = \dfrac{1}{2} HB = 5$ cm.

b) Déterminer la longueur HA en justifiant la réponse.

H est le milieu du segment $[AE]$, donc $HA = HE = 5$ cm.

2/ Démontrer que l'angle $\widehat{AFH}$ mesure 90° .

Les points $(B\ ;H\ ;F)$ sont alignés, ainsi que $(A\ ;H\ ;E)$. Les angles $\widehat{BHE}$ et $\widehat{AHF}$ sont opposés par le sommet, donc de même mesure : 60° .

La somme des angles aigus du triangle (AHF) vaut $60° + 30° = 90°$, ce qui laisse $90°$ pour l'angle $\widehat{AFH}$, puisque la somme des angles d'un triangle mesure $180°$.

3/ Les droites (AF) et (BE) se coupent en un point C .

a) Que représentent les droites (AE) et (BF) pour le triangle (ABC) ?

Les droites (AE) et (BF) sont les hauteurs issues des sommets A et B du triangle (ABC) .

b) En déduire que les droites (CH) et (AB) sont perpendiculaires.

Le trois hauteurs d'un triangle étant concourantes en un même point, nommé *orthocentre* du triangle, on conclue que la droite (CH) est la troisième hauteur du triangle (ABC) .

En conséquence, la hauteur (CH) est perpendiculaire au côté (AB) de ce triangle.

4/ Sur le segment [HA] , placer le point I tel que HI = 3 cm.

Sur le segment [HB] , placer le point J tel que HJ = 6 cm.

Démontrer que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.

D'après la réciproque du théorème de Thalès : Les droites (IJ) et (AB) coupent les sécantes (HA) et (HB) de telle façon que : $\dfrac{HI}{HA} = \dfrac{3}{5}$ et $\dfrac{HJ}{HB} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

$\dfrac{HI}{HA} = \dfrac{HJ}{HB}$ prouve que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.

5/ Les droites (CH) et (IJ) se coupent en un point M .

En utilisant les résultats précédents, montrer que le triangle (JMC) est rectangle en M .

La droite (CH) , hauteur du triangle (ABC) relative au côté [AB] est perpendiculaire à ce dernier, dont également à sa parallèle (IJ) .

Ceci prouve que le triangle (JMC) est rectangle en M .

6/ Démontrer que les quatre points (J ; M ; C ; F) appartiennent à un même cercle. Préciser la position de son centre.

Tout triangle rectangle est *inscriptible* dans un demi-cercle, dont le centre est le milieu de l'hypoténuse du triangle.

Les triangles (JMC) , rectangle en M , et (JFC) , rectangle en J , ont même hypoténuse [JC].

Ils sont donc inscriptibles dans le cercle de diamètre [JC] , le centre du cercle étant le milieu de [JC] .