Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour tout entier naturel n .

1/ Prouver par des exemples numériques que la suite u n'est ni arithmétique, ni géométrique.

$u_0 = 2$; $u_1 = 3u_0 - 2 = 4$; $u_2 = 3u_1 - 2 = 10$.

$(2 , 4 , 10)$ n'est en effet ni arithmétique ni géométrique. Il aurait fallu obtenir $(2 , 4 , 6)$ pour être arithmétique, ou $(2 , 4 , 8)$ pour être géométrique.

2/ Soit la suite v telle que $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n . Démontrer que v est une suite géométrique.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_n - 1} = \frac{(3u_n - 2) - 1}{u_n - 1} = \frac{3(u_n - 1)}{u_n - 1} = 3 = q .$$

La suite v est bien géométrique, de raison $q = 3$.

3/ Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

v géométrique $\Leftrightarrow$ $v_n = v_0\, q^n = (u_0 - 1)q^n = 3^n$. En conséquence : $u_n = v_n + 1 = 3^n + 1$.

Quelles sont les limites de ces deux suites lorsque n devient infini.

$| q | > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ dont on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = (\lim\limits_{n \to +\infty} v_n) + 1 = +\infty$.