Soit l'équation : $x^2 (x - 5) + 4 = 0$.

a) Rechercher une racine évidente.

Développons l'expression : $x^2 (x - 5) + 4 = x^3 - 5x^2 + 4 = 0$.

On constate que $x = 1$ est solution de cette équation : $1^3 - 5.1^2 + 4 = 1 - 5 + 4 = 0$.

b) En déduire la factorisation qui en découle.

Lorsqu'un polynôme s'annule en $x = a$, on peut factoriser $x - a$.

Donc $x^3 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$.

On *identifie* les coefficients $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -5 \\ c - b = 0 \\ -c = 4 \end{cases}$, dont les solutions sont $a = 1$, $b = -4$, $c = -4$.

La factorisation recherchée est $x^3 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x^2 - 4x - 4)$.

c) Terminer la résolution.

$x^3 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 4x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x^2 - 4x - 4 = 0$.

Il reste à résoudre $x^2 - 4x - 4 = 0$:

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 16 = 32$, d'où les racines $\begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 + \sqrt{32}}{2} = \dfrac{4 + 4\sqrt{2}}{2} = 2 + 2\sqrt{2} \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 - \sqrt{32}}{2} = \dfrac{4 - 4\sqrt{2}}{2} = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$.

Donc $S = \{+1 , 2 - 2\sqrt{2} , 2 + 2\sqrt{2}\}$.