Soit la fonction f définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$.

1/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. (On admettra que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$)

Si $x \neq 0$ alors $e^x \neq 1$, donc $f(x)$ est définie pour tout x réel : $D_f = \mathbb{R}$.

Si $x \neq 0$, f est continue et dérivable, comme rapports de fonctions continues et dérivables.

<u>Continuité en $x = 0$:</u>

f est de forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ lorsque $x = 0$.

On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x - 0} = \exp'(0) = e^0 = 1$.

Comme $f(x)$ est l'inverse de cette expression, on conclue $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, ce qui assure la continuité de f en $x = 0$.

Donc, f est continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Dérivabilité en $x = 0$:</u> (**Pour ceux qui ne veulent pas accepter sans preuve que** $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$)

Le développement limité d'ordre 2 de e^x est $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, d'où $e^x - 1 \approx x + \dfrac{x^2}{2}$ et $1 + x - e^x \approx -\dfrac{x^2}{2}$.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x - e^x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\dfrac{x^2}{2}}{x^2 + \dfrac{x^3}{2}} ,$$

$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\dfrac{1}{2}}{1 + \dfrac{x}{2}} = -\dfrac{1}{2}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2/ Montrer que $y = -x$ est asymptote oblique au graphe de f .

Si $x \to -\infty$, $e^x \to 0^+$ donc $e^x - 1 \to -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

$f(x) - (-x) = \dfrac{x}{e^x - 1} + x = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$.

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} x.e^x = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1) = -1$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) + x] = 0^+$.

La 2ème bissectrice des axes est *asymptote oblique* au graphe.

3/ Par une rapide étude, déterminer le signe de $g(x) = xe^x - e^x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$.

$xe^x - e^x = e^x(x - 1) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$, puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

$g'(x) = (e^x + xe^x) - e^x = xe^x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, avec $g(0) = 0$. La dérivée $g'(x)$ est du signe de x .

- *Tableau de variation* :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$y = g(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

On constate que $g(0) = 0$ et $g(x) > 0$ si $x \neq 0$.

4/ Terminer l'étude et tracer le graphe de f .

- *Domaine de définition* : On a vu que $D_f = \mathbb{R}$, et que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(1) = 1$ et $f(-1) = -e^2$, donc f n'est ni paire ni impaire.

- *Limites aux bornes* :

Si $x \to -\infty$, $e^x \to 0^+$ d'où $e^x - 1 \to -1$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^x - 1} = -\infty$.

On a vu que le graphe présente une asymptote oblique $y = -x$.

Si $x \to +\infty$, $e^x - 1 \to +\infty$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, on déduit qu'à l'inverse $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$.

Le graphe présente une asymptote horizontale $y = 0$.

- *Intersections avec les axes de coordonnées* :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, donc $G_f \cap x'x = G_f \cap y'y = \{O\ (0\ ;\ 0)\}$.

- *Dérivée* :

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$. Donc $f'(x) = \dfrac{(e^x - 1) - xe^x}{(e^x - 1)^2} = -\dfrac{xe^x - e^x + 1}{(e^x - 1)^2} = -\dfrac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

On a étudié précédemment le signe de $g(x)$.

- *Tableau de Variation* :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\dfrac{1}{2}$	$-$	
$y = f(x)$	$+\infty$ $y = -x$	↘	1	↘	0^+

- *Graphe* :