Soit $f(x) = e^{-x+3} + \dfrac{1}{e^{3x-1}}$. Donner son domaine de définition, puis résoudre $f(x) = 2e^4$.

L'exponentielle e^X étant définie dès que X existe, aucune valeur réelle de x n'empêche le calcul de $f(x)$.

Le domaine est $D_f = \mathbb{R}$.

$f(x) = 2e^{-4} \Leftrightarrow e^{-x+3} + \dfrac{1}{e^{3x-1}} = 2e^4 \Leftrightarrow e^{-x+3} \,.\, e^{3x-1} + 1 = 2e^4 \,.\, e^{3x-1} \Leftrightarrow e^{2x+2} + 1 = 2e^{3x+3}$.

On pose $X = e^{x+1}$. L'équation devient $X^2 + 1 = 2X^3 \Leftrightarrow 2X^3 - X^2 - 1 = 0$.

$X = +1$ est racine évidente, ce qui permet la factorisation de $X - 1$: $2X^3 - X^2 - 1 = (X-1)(2X^2 + X + 1) = 0$

L'équation $2X^2 + X + 1 = 0$ n'admet pas de racine, car son discriminant est négatif.

La seule solution est $X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = 1 \Leftrightarrow e^{x+1} = 1 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Donc $\boldsymbol{S = \{-1\}}$.