Tracer un cercle (C) de centre O. Tracer un diamètre $[AB]$. Tracer le cercle (C') de centre B et de rayon BA.

La droite (AB) coupe le cercle (C') en A et E.

Choisir un point C quelconque sur le cercle (C'), mais distinct de A et E.

La droite (AC) coupe le cercle (C) en A et D.

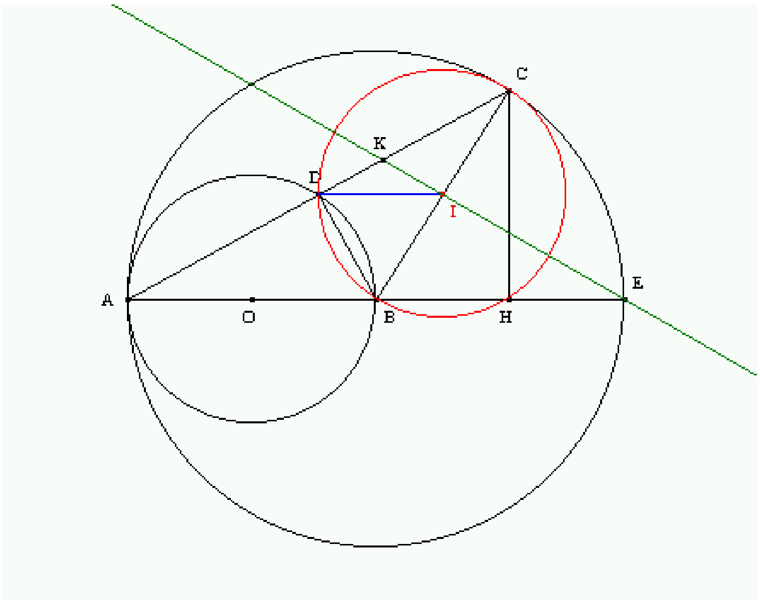
1/ Quelle est la nature du triangle (ABD) ?

Le triangle (ABD) est inscrit dans le demi-cercle (C) de diamètre $[AB]$. C'est donc un triangle rectangle.

En effet, $OA = OB = OD$ ce qui prouve que la médiane $[OD]$ est égale à la moitié de l'hypoténuse $[AB]$, caractéristique des triangles rectangles.

2 - a) Quelle est la nature du triangle (ABC) ?

$AB = BC$, comme rayons du cercle (C'). Donc le triangle (ABC) est isocèle, de sommet B.



b) Démontrer que la droite (BD) est la médiatrice du segment $[AC]$.

Comme $AB = AC$, le point A est équidistant des extrémités B et C du segment $[BC]$.

Le point A est donc situé sur la médiatrice du segment $[BC]$.

Il faut encore prouver que (BD) est perpendiculaire à $[AC]$.

Or, on a vu que le triangle (ABD) est rectangle, de sommet D, ce qui prouve cette perpendicularité.

La droite (BD) est bien la médiatrice du segment $[AC]$.

3/ Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AE).

Démontrer que C, D, B et H appartiennent à un cercle (C'') dont on précisera le centre I.

Les triangles (BCD) et (BCH) sont rectangles, de sommets respectifs D et H.

Ils sont donc inscrits dans des demi-cercles, lesquels forment le cercle (C''), de diamètre $[BC]$.

Le centre I est donc le milieu du segment $[BC]$.

4/ Démontrer que les droites (ID) et (AB) sont parallèles.

Le théorème de la *droite des milieux* affirme que : Le segment qui joint les milieux de deux cotés d'un triangle est parallèle au troisième coté et égal à la moitié de celui-ci.

En effet, d'après la réciproque du théorème de Thalès, $\frac{CD}{CA} = \frac{CI}{CB} = \frac{1}{2} = \frac{DI}{AB}$.

Donc, les droites (ID) et (AB) sont parallèles.

5 - a) Comparer les distances DI et AB. En déduire que $AE = 4\,DI$.

On vient de voir que $\frac{DI}{AB} = \frac{1}{2}$, soit $AB = 2\,DI$.

Comme $AE = 2\,AB$, on déduit $AE = 4\,DI$.

b) La droite (EI) coupe (AC) en K. Démontrer que $EK = 4\,KI$.

Comme les droites (DI) et (AE) sont parallèles, elles déterminent sur les sécantes (KA) et (KE) des segments proportionnels (théorème de Thalès), donc : $\frac{KI}{KE} = \frac{DI}{AE} = \frac{1}{4} \Rightarrow KE = 4KI$.