Soit un repère orthonormé $R\ (O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$ du plan affine et les points de ce plan, ayant pour coordonnées :
$A\ (-3\ ;\ 2)$, $B\ (1\ ;\ -2)$ et $C(3\ ;\ 3)$.

1) Donner une équation de la médiane (D) du triangle (ABC) issue du sommet C .

La *médiane* (D) est la droite issue du sommet C qui passe par le milieu I du côté opposé $[AB]$.

$$I \text{ milieu de } [AB] \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-3+1}{2} = -1 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{2+(-2)}{2} = 0 \end{cases} \text{, soit } I\ (-1\ ;\ 0)\ .$$

La médiane (D) est donc la droite D_{CI} d'équation $D : y = ax + b$:

Soit $M\ (x\ ;\ y)$ un point quelconque de cette droite. Les points C , I et M sont alignés, donc les *pentes* p_{CM} et p_{CI} sont identiques :

$$p_{CM} = \frac{y_M - y_C}{x_M - x_C} = \frac{y-3}{x-3} \text{ et } p_{CI} = \frac{y_I - y_C}{x_I - x_C} = \frac{0-3}{-1-3} = \frac{-3}{-4} = +\frac{3}{4}\ .$$

$$p_{CM} = p_{CI} \Leftrightarrow \frac{y-3}{x-3} = +\frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(y-3) = 3(x-3) \Leftrightarrow 4y - 12 = 3x - 9 \Leftrightarrow 3x - 4y + 3 = 0\ .$$

La médiane (D) admet $D : 3x - 4y + 3 = 0$ pour *équation cartésienne généralisée*).

$$3x - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow 4y = 3x + 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}\ .$$

La médiane (D) admet $D : y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$ pour *équation cartésienne <u>réduite</u>*).

2) Soit G le centre de gravité du triangle (ABC) et I le milieu du côté $[AB]$.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{CI}$. En déduire les coordonnées du point G .

Le *centre de gravité* G est situé *aux deux-tiers de chaque médiane, en partant du sommet* :

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G - x_C \\ y_G - y_C \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} x_I - x_C \\ y_I - y_C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_G - 3 \\ y_G - 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G - 3 = -\dfrac{8}{3} \\ y_G - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 3 - \dfrac{8}{3} \\ y_G = 3 - 2 \end{cases}\ .$$

On déduit : $G\ (+\frac{1}{3}\ ;\ +1)$.

3) Vérifier que le point G satisfait l'équation de la médiane (D) .

La relation $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$ assure déjà que le point G soit sur la médiane $(D) = (CI)$.

Vérifions cependant que $G\ (+\frac{1}{3}\ ;\ +1)$ satisfait l'équation de $D : y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$.

Il faut donc que $y_G = \frac{3}{4}x_G + \frac{3}{4}$, soit $1 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, ce qui est vérifié.