On définit les suites u et v par $\begin{cases} u_n = \dfrac{2^n - 4n + 5}{4} \\ v_n = \dfrac{2^n + 4n - 5}{4} \end{cases}$, pour tout n entier naturel.

1) Montrer que la suite a définie par $a_n = u_n + v_n$ est géométrique et calculer la somme $A_{10} = \sum\limits_{n=0}^{10} a_n$.

$a_n = u_n + v_n = \dfrac{2^n - 4n + 5}{4} + \dfrac{2^n + 4n - 5}{4} = \dfrac{2\times 2^n}{4} = \dfrac{1}{2}\times 2^n = a_0\, q^n$, forme générale d'une suite géométrique.

On pouvait aussi, à partir de $a_n = \dfrac{1}{2}\times 2^n$ *, vérifier que* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{C^{te}} = +2 = q$.

a est une suite géométrique de premier terme $a_0 = \dfrac{1}{2}$ et de raison $q = 2$.

On remarquera que $\sum\limits_{n=0}^{10} a_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{10}$ *comporte* 11 *termes.*

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique est $A_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1} a_p = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} = a_0 \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$.

$$\boldsymbol{S_n = (1^{\text{er}}\ \text{terme}) \times \frac{1 - q^{(\text{nbre de termes})}}{1 - q}\ .}$$

Donc : $A_{10} = \sum\limits_{n=0}^{10} a_n = a_0 \dfrac{1 - q^{11}}{1 - q} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = \dfrac{2^{11} - 1}{2} = \dfrac{2047}{2} = 1023{,}5$.

2) Montrer que la suite b définie par $b_n = u_n - v_n$ est arithmétique et calculer la somme $B_{10} = \sum\limits_{n=0}^{10} b_n$.

$b_n = u_n - v_n = \dfrac{2^n - 4n + 5}{4} - \dfrac{2^n + 4n - 5}{4} = \dfrac{-8n + 10}{4} = -2n + \dfrac{5}{2} = nr + b_0$, forme générale d'une suite arithmétique.

On pouvait aussi, à partir de $b_n = -2n + \dfrac{5}{2}$ *, vérifier que* $b_{n+1} - b_n = \mathrm{C^{te}} = -2 = r$.

b est une suite arithmétique de premier terme $b_0 = +\dfrac{5}{2}$ et de raison $r = -2$.

On remarquera à nouveau que $\sum\limits_{n=0}^{10} b_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_{10}$ *comporte* 11 *termes.*

La somme des n premiers termes d'une suite arithmétique est $B_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1} b_p = b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1} = \dfrac{n}{2}(b_0 + b_n)$.

$$\boldsymbol{S_n = \frac{\text{nbre de termes}}{2} \times (1^{\text{er}}\ \text{terme} + \text{dernier terme})\ .}$$

Donc $B_{10} = \dfrac{11}{2}(b_0 + b_{10}) = \dfrac{11}{2}\left[\dfrac{5}{2} + \left(\dfrac{5}{2} - 2\times 11\right)\right] = \dfrac{11}{2}(-17) = -\dfrac{187}{2} = -93{,}5$.

3) En déduire la somme $S_{10} = \sum_{n=0}^{10} u_n$ et $T_{10} = \sum_{n=0}^{10} v_n$.

$$u_n = \frac{a_n + b_n}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{a_0 + b_0}{2} + \frac{a_1 + b_1}{2} + \ldots + \frac{a_{10} + b_{10}}{2} = \frac{(a_0 + a_1 + \ldots + a_{10}) + (b_0 + b_1 + \ldots + b_{10})}{2},$$

$$S_{10} = \frac{A_{10} + B_{10}}{2} = \frac{1023{,}5 - 93{,}5}{2} = +465 .$$

$$v_n = \frac{a_n - b_n}{2} \Rightarrow \Rightarrow T_{10} = \frac{a_0 - b_0}{2} + \frac{a_1 - b_1}{2} + \ldots + \frac{a_{10} - b_{10}}{2} = \frac{(a_0 + a_1 + \ldots + a_{10}) - (b_0 + b_1 + \ldots + b_{10})}{2},$$

$$T_{10} = \frac{A_{10} - B_{10}}{2} = \frac{1023{,}5 + 93{,}5}{2} = +558{,}5 .$$