1/ Faire l'étude et tracer le graphe (*C*) de $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$. (unité graphique 4 cm)

a) *Domaine de définition - Continuité - Dérivabilité - Parité :*

f est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On remarquera que $1 + e^{-x} > 0$, pour tout x réel. Le graphe sera toujours au dessus de l'axe $x'x$.

$f(1) = \dfrac{1}{1 + e^{-1}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{e}} = \dfrac{e}{e + 1} \approx 0{,}73$ et $f(-1) = \dfrac{1}{1 + e} \approx 0{,}27$. La fonction n'est ni paire ni impaire.

b) *Limites aux bornes du domaine :*

Si $x \to -\infty$, alors $-x \to +\infty$, $1 + e^{-x} \to +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Le graphe présente une asymptote horizontale $y = 0$.

Si $x \to +\infty$, alors $-x \to -\infty$, $1 + e^{-x} \to 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Le graphe présente une asymptote horizontale $y = 1$.

c) *Intersections avec les axes de coordonnées :*

On a vu que $f(x) > 0$, pour tout x réel , donc $G_f \cap x'x = \varnothing$.

Comme $f(0) = \dfrac{1}{2}$, on a $G_f \cap y'y = \{B\,(0\,;\dfrac{1}{2})\}$.

d) *Dérivée - Extrema - Signe de la Dérivée :*

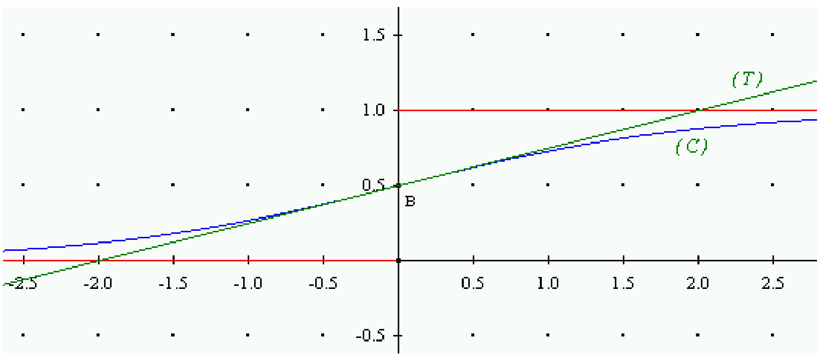
On sait que $(e^u)' = u'\,e^u$ et que $f = \dfrac{1}{u} \Rightarrow f' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

$f'(x) = -\dfrac{(1 + e^{-x})'}{(1 + e^{-x})^2} = -\dfrac{-e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} > 0$ pour tout x réel.

e) *Tableau de Variation :*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	1/4	+	
$y = f(x)$	0	↗	1/2	↗	1

f) *Graphe :*



2/ Montrer que (C) admet un centre de symétrie B .

Le graphe laisse prévoir que le centre de symétrie est $B\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$.

$B\,(a\,;b)$ centre de symétrie de $G_f \Leftrightarrow f\,(2a-x)+f\,(x)=2b$, pour tout x du domaine.

$f(2a-x)+f(x)=f(-x)+f(x)=\dfrac{1}{1+e^{x}}+\dfrac{1}{1+e^{-x}}=\dfrac{1}{1+e^{x}}+\dfrac{e^{x}}{e^{x}(1+e^{-x})}=\dfrac{1}{1+e^{x}}+\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}=\dfrac{1+e^{x}}{1+e^{x}}=1=2b$, résultat attendu.

3/ Soit $u<0$. Calculer l'aire A_u du *domaine plan* E constitué de l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que :

$\begin{cases} u \le x \le 0 \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$.

Le domaine (E) est celui *délimité* par les verticales d'abscisses u et 0 , l'axe $x'x$ et le graphe (C) .

f est positive. Le nombre de *pavés élémentaires* de cette aire est : $\displaystyle\int_u^0 f(x)\,dx=\int_u^0 \frac{dx}{1+e^{-x}}=\int_u^0 \frac{e^{x}}{1+e^{x}}\,dx$.

On constate une forme $\dfrac{u'}{u}$ de primitive $\ln|u|$:

$\displaystyle\int_u^0 f(x)\,dx=[\ln(e^{x}+1)]_u^0=F(0)-F(u)=\ln 2-\ln(e^{u}+1)$ pavés élémentaires.

$A_u=[\ln 2-\ln(e^{u}+1)]\,u\times u'\ \text{cm}^2=16[\ln 2-\ln(e^{u}+1)]\ \text{cm}^2$.

4/ Déterminer la limite de A_u lorsque u tend vers $-\infty$.

Si $u\to-\infty$, alors $e^{u}\to 0$ et $\ln(e^{u}+1)\to\ln 1=0$ par continuité.

Donc $\displaystyle\lim_{u\to-\infty} A_u=16\times\ln 2\ \text{cm}^2\approx 11{,}1\ \text{cm}^2$.

Ce résultat représente l'aire entre (C) et l'axe $x'x$, de $-\infty$ à 0 .