Résoudre dans ℝ : $\dfrac{\mathbf{-3x^2 + 9x + 11}}{\mathbf{x^2 - 4x + 1}} \leq \mathbf{-1}$.

Ramenons l'ensemble des termes à gauche, afin d'obtenir 0 à droite, puis mettons au même dénominateur, pour établir un tableau de signes.

$$\frac{-3x^2 + 9x + 11}{x^2 - 4x + 1} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{-3x^2 + 9x + 11}{x^2 - 4x + 1} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(-3x^2 + 9x + 11) + (x^2 - 4x + 1)}{x^2 - 4x + 1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 5x + 12}{x^2 - 4x + 1} \leq 0 .$$

Racines du numérateur :

$-2x^2 + 5x + 12 = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 96 = 121 = 11^2$. Les racines sont $\begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 + 11}{-4} = -\dfrac{3}{2} \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5 - 11}{-4} = +4 \end{cases}$.

Racines du dénominateur :

$x^2 - 4x + 1 = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 = 12 = (2\sqrt{3})^2$. Les racines sont $\begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 2 + \sqrt{3} \approx 3,73 \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 2 - \sqrt{3} \approx +0,27 \end{cases}$.

d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-3/2$		$0,27$		$3,73$		4		$+\infty$
$-2x^2 + 5x + 12$		-	0	+	|	+	|	+	0	-	
$x^2 - 4x + 1$		+	|	+	0	-	0	+	|	+	
$\boldsymbol{R(x)}$		**-**	**0**	**+**	||	**-**	||	**+**	**0**	**-**	

$\boldsymbol{S =]-\infty \, ; -\frac{3}{2}] \cup]2 - \sqrt{3} \, ; 2 + \sqrt{3}[\cup [4 \, ; +\infty[}$.