Soit $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct, d'unité le cm.

On considère la droite (D) d'équation $D : x - 2y + 1 = 0$ et le point $A\,(2\,;\,5)$.

Le but de l'exercice est de déterminer la distance de A à la droite (D) .

1ère Méthode :

1/ Indiquer un vecteur $\vec{n}$ *normal* à la droite (D). Calculer $\|\vec{n}\|$.

La droite $D : ax + by + c = 0$ admet $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ pour *vecteur directeur*, dans la direction de la droite, et $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour *vecteur normal*, orthogonal à cette droite. ($\vec{u}.\vec{n} = aa' + bb' = (-b)a + ab = 0$, soit $\vec{u} \perp \vec{n}$).

d'où $\vec{n}\begin{pmatrix} +1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} \Rightarrow \|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$.

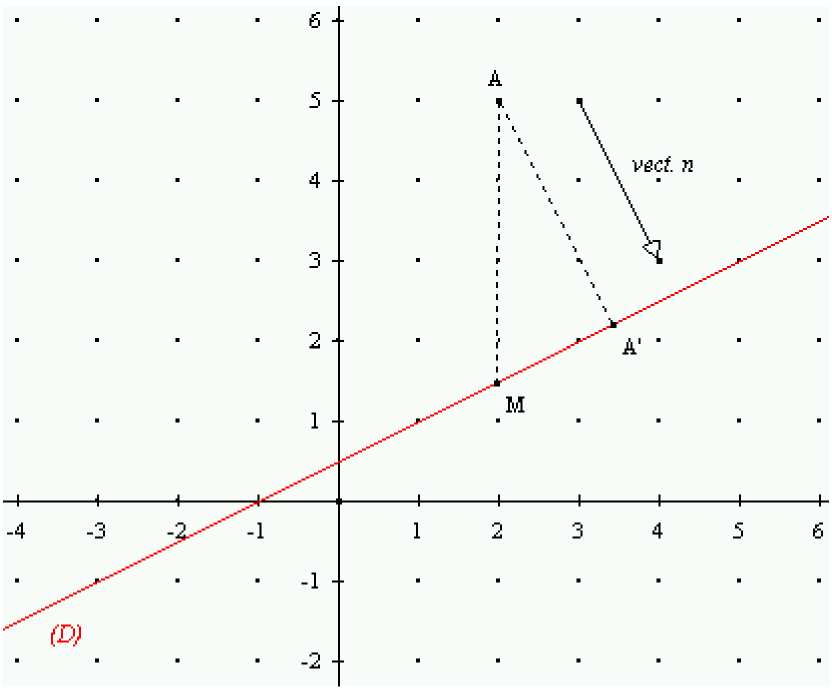
2/ On note A' le projeté orthogonal de A sur la droite (D).

a) Justifier l'égalité : $|\vec{AA'}.\vec{n}| = AA' \times \|\vec{n}\|$.

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) \Rightarrow \vec{AA'}.\vec{n} = AA' \times \|\vec{n}\| \times \cos(\vec{AA'}, \vec{n})$.

Comme $\vec{AA'}$ est colinéaire à $\vec{n}$, on déduit *angle* $(\vec{AA'}\,;\,\vec{n}) = 0\ [\pi]$, soit $\cos(\vec{AA'}, \vec{n}) = \pm 1$.

En prenant la valeur absolue , on obtient bien $|\vec{AA'}.\vec{n}| = AA' \times \|\vec{n}\|$.



b) Utiliser un point quelconque de (D) pour calculer $\vec{AA'}.\vec{n}$.

Soit $M\,(2\,;\frac{3}{2})$, qui est bien un point de la droite (D) : $\vec{AA'}.\vec{n} = (\vec{AM} + \vec{MA'}).\vec{n} = \vec{AM}.\vec{n} + \vec{MA'}.\vec{n}$.

Comme $\vec{MA'}$ est orthogonal à $\vec{n}$, on déduit $\vec{MA'}.\vec{n} = 0$, d'où : $\vec{AA'}.\vec{n} = \vec{AM}.\vec{n}$.

$\vec{AM}\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} +1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AA'}.\vec{n} = \vec{AM}.\vec{n} = aa' + bb' = +7$.

c) Déduire de a) et b) la distance AA'.

On sait que $|\overrightarrow{AA'}.\vec{n}| = AA' \times \|\vec{n}\|$, soit $AA' \times \|\vec{n}\| = 7 \Leftrightarrow AA' = \dfrac{7}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{7}{\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}$.

2ème Méthode :

1/ Déterminer une équation de la droite (AA') .

On sait que la droite $D : ax + by + c = 0$ admet $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal, d'où :

La droite (AA') , de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix} +1 \\ -2 \end{pmatrix}$, est de la forme $D' : 2x + y + c = 0$.

Imposons que $A\,(2\,;\,5)$ soit sur (D') : $2(2) + 5 + c = 0$, soit $c = -9$.

On déduit $D' \,|\, 2x + y - 9 = 0$.

2/ Déterminer les coordonnées de A'.

A' est le point d'intersection des droites (D) et (D') , donc ses coordonnées vérifient les système :

$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases}$ de couple solution unique $(x\,;\,y) = (\dfrac{17}{5}\,;\,\dfrac{11}{5})$. On déduit : $A'(\dfrac{17}{5}\,;\,\dfrac{11}{5})$.

3/ Calculer la distance AA'.

$AA' = \sqrt{(x_{A'} - x_A)^2 + (y_{A'} - y_A)^2} = \sqrt{(\dfrac{17}{5} - 2)^2 + (\dfrac{11}{5} - 5)^2} = \sqrt{\dfrac{49}{25} + \dfrac{196}{25}} = \sqrt{\dfrac{245}{25}} = \sqrt{\dfrac{49}{5}} = \dfrac{7}{\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}$.