1/ On suppose que $\sin x = -\frac{4}{5}$ et que $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$. Calculer $\cos x$:

Si $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ (3ème quadrant) , on a $\sin x < 0$ et $\cos x < 0$.

Reportons $\sin x = -\frac{4}{5}$ dans $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - (-\frac{4}{5})^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$.

On déduit $\cos x = \pm\frac{3}{5}$, mais $\cos x < 0$, cela impose $\cos x = -\frac{3}{5}$.

2/ - a) Démontrer que pour tout x réel : $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$.

$(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = (\cos^2 x + 2\cos x.\sin x + \sin^2 x) + (\cos^2 x - 2\cos x.\sin x + \sin^2 x)$,

soit $2(\cos^2 x + \sin^2 x) = 2$.

b) En supposant que $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$, calculer $\cos x$ et $\sin x$.

Reportons $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$ dans $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$:

$(\cos x + \sin x)^2 + \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)^2 = \frac{7}{4}$.

Il y a deux éventualités $\begin{cases} \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{7}}{2} \\ \cos x + \sin x = -\frac{\sqrt{7}}{2} \end{cases}$.

1er Système :

$\left\{ \begin{array}{l} \cos x + \sin x = \frac{\sqrt{7}}{2} \\ \cos x - \sin x = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\cos x = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$, soit $\cos x = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$ et $\sin x = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$ après report.

2ème Système :

$\left\{ \begin{array}{l} \cos x + \sin x = -\frac{\sqrt{7}}{2} \\ \cos x - \sin x = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 2\cos x = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$, soit $\cos x = \frac{1-\sqrt{7}}{4}$ et $\sin x = \frac{-1-\sqrt{7}}{4}$ après report.