Soit $f(x) = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

Discuter la continuité et la dérivabilité de f.

$f(x)$ est calculable si et seulement si $\dfrac{1-x}{1+x} \geq 0$. Donc $D_f =\ ]-1\ ;+1\ ]$.

La fonction f est continue sur son domaine comme produit, composée et rapport des fonctions continues que sont les polynômes et les racines. **On conclue que f est continue sur $]-1\ ;+1\ ]$.**

Les fonctions « racine » présentent généralement un point de non-dérivabilité aux abscisses qui les annulent. (tangente verticale).

Pour les autres valeurs de x on peut affirmer que la fonction f est dérivable sur $]-1\ ;+1[$ comme produit, composée et rapports des fonctions continues que sont les polynômes et les racines (lorsqu'elles ne sont pas nulles).

Etudions particulièrement la dérivabilité en $x = +1$.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)\sqrt{\dfrac{1-(1+h)}{1+(1+h)}}-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)\sqrt{\dfrac{h}{2+h}}}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1+h}{h}\sqrt{\frac{h}{2+h}}\ .$$

L'objectif est d'entrer h dans la racine, or seule une quantité positive peut entrer dans une racine.

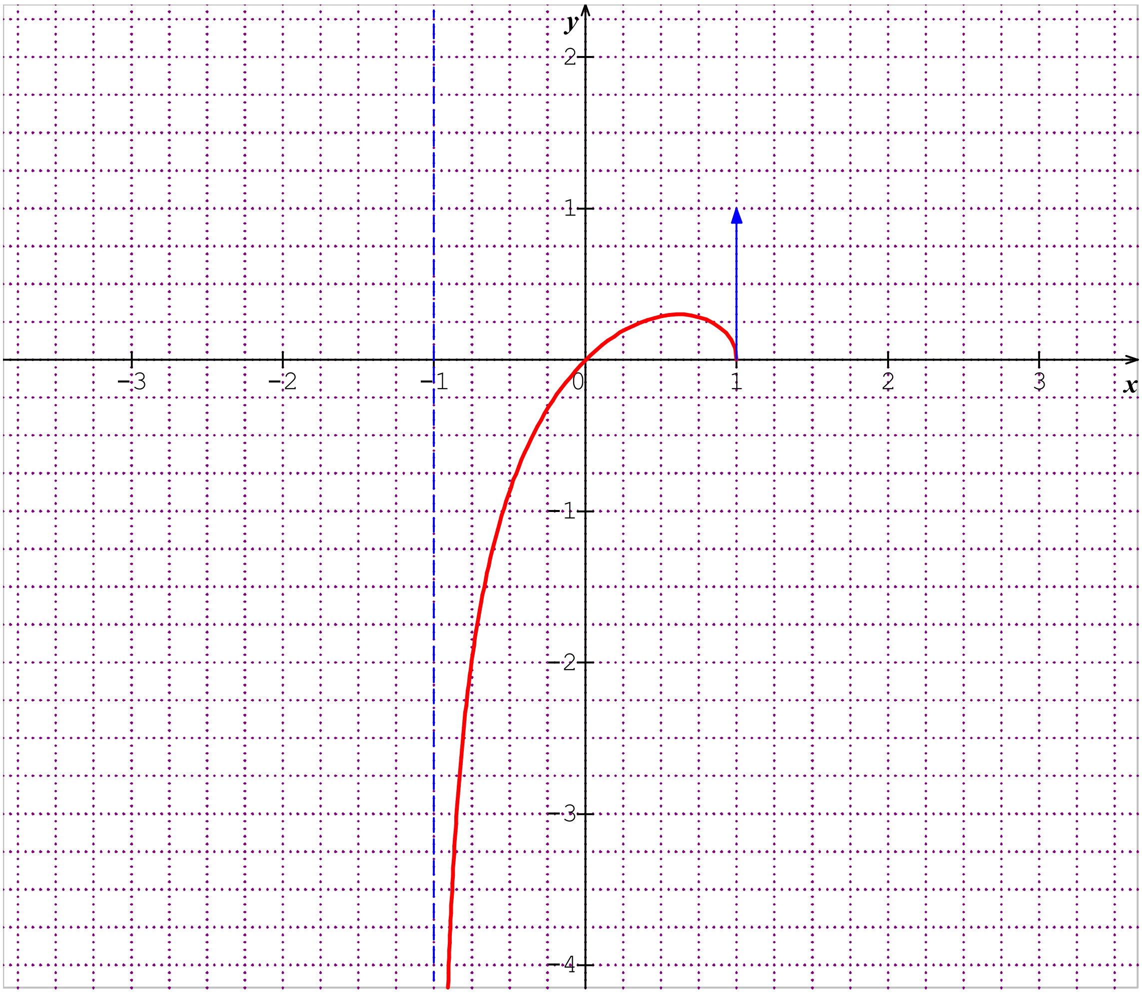
$$f'(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -\lim_{h\to 0^-} \frac{1+h}{|h|}\sqrt{\frac{h}{2+h}} = -\lim_{h\to 0^-} (1+h)\sqrt{\frac{h}{h^2(2+h)}} = -\lim_{h\to 0^-} (1+h)\sqrt{\frac{1}{h(2+h)}},$$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0^-} (1+h) = 1 \text{ et } \lim_{h\to 0^-} \sqrt{\frac{1}{h(2+h)}} = \lim_{h\to 0^-} \sqrt{\frac{1}{h^2}} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{|h|} = +\infty\ .$$

On déduit $f'(1) = -\infty$ (tangente verticale).

La fonction f n'est pas dérivable en $x = 1$.

On conclue que f est dérivable sur $]-1\ ;+1\ [$.


y
2
1
−1
−2
−3
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
x