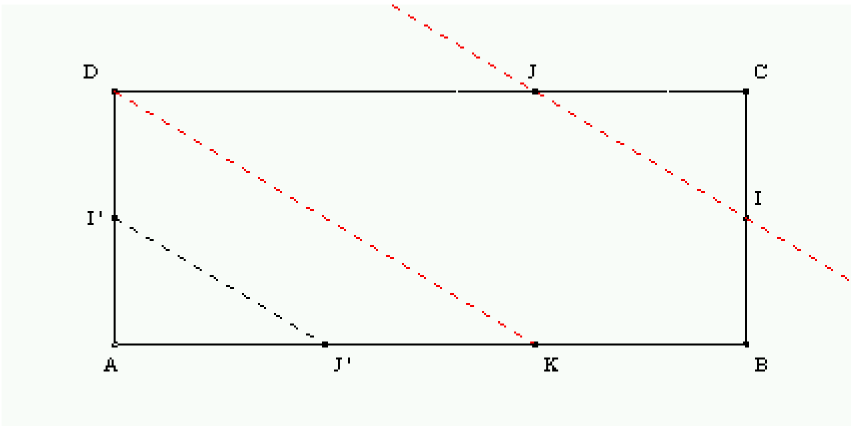
*Solution - Théorème de Thalès -Triangles semblables - Théorème de Pythagore - s0812*

**Soit un rectangle $(ABCD)$ et le point $K$ du segment $[AB]$ tel que $AK = \frac{2}{3}AB$.**

**Soit $I$ le milieu de $[BC]$ et $J$ l'intersection de la parallèle à $(DK)$ menée par $I$ avec $(CD)$.**

**1) Montrer que $DJ = AK$, puis que les droites $(KJ)$ et $(AB)$ sont perpendiculaires.**




Soit $I'$ le milieu de $[AD]$ et $J'$ le point où la parallèle à $(DK)$ passant par $I'$ coupe $(AB)$.
D'après le théorème de Thalès, les parallèles $(I'J')$ et $(DK)$ coupent les sécantes $(AB)$ et $(AD)$ selon des segments proportionnels, c'est à dire $\frac{AJ'}{AK} = \frac{AI'}{AD} = \frac{1}{2}$ , puisque $I'$ est le milieu de $[AD]$.

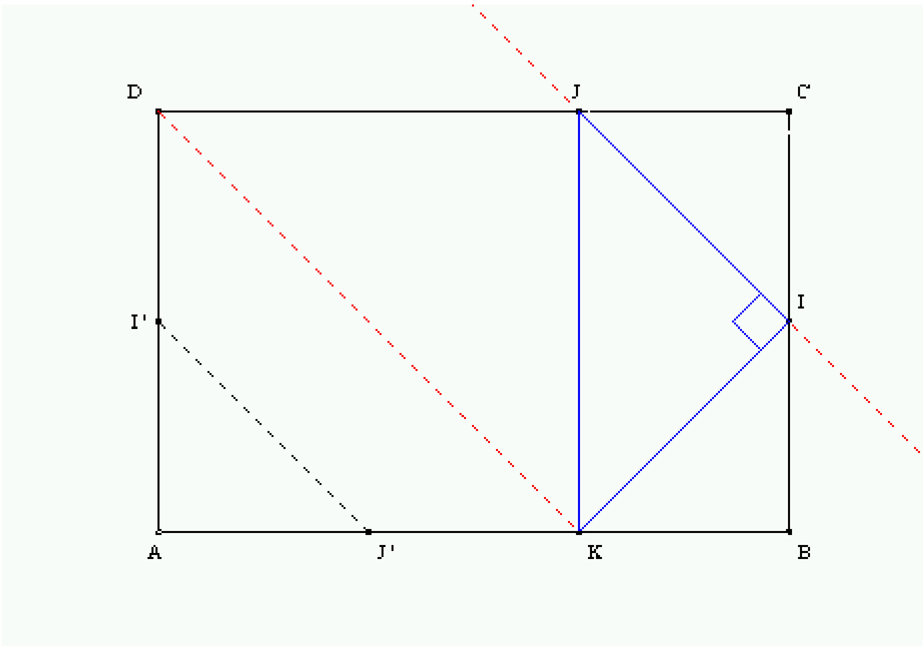
On peut conclure $AJ' = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{3}AB$ .

Les triangles $(AI'J')$ et $(CIJ)$ sont égaux, puisque leurs trois cotés sont parallèles et qu'ils ont un coté égal : $AJ' = CI = \frac{1}{2}BC$.

On peut donc affirmer que $CJ = AJ'$, ou encore que $CJ = KB$.
Par différence sur les cotés égaux $CD = AB$, on obtient $CD - CJ = AB - KB$, soit $DJ = AK$.

Le trapèze rectangle $(AKJD)$ a ses bases $[AK]$ et $[DJ]$ égales et est donc un rectangle.
Ceci prouve que $(KJ)$ est perpendiculaire à $(AB)$.

**2) Quel doit être le rapport $\frac{AB}{BC}$ pour que les droites $(KI)$ et $(DK)$ soient perpendiculaires ?**




Pour que $(KI)$ soit perpendiculaire à $(DK)$, il faut que $(IJ)$ soit perpendiculaire à $(KI)$, donc que le triangle $(KIJ)$ soit rectangle en $I$.

Le théorème de Pythagore impose donc : $KJ^2 = KI^2 + IJ^2$, ou encore $KJ^2 = 2\,KI^2$, puisque $IJ = KI = I'J'$.

$KJ^2 = BC^2$ et $KI^2 = KB^2 + BI^2 = \left(\frac{1}{3}AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 = \frac{1}{9}AB^2 + \frac{1}{4}BC^2$.

$KJ^2 = 2\,KI^2$ devient $BC^2 = \frac{2}{9}AB^2 + \frac{2}{4}BC^2$, soit $36\,BC^2 = 8\,AB^2 + 18\,BC^2$, ou encore $8\,AB^2 = 18\,BC^2$.

$\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}$.