Soit la suite u définie par $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$ et $u_0 = 1$.

1/ Démontrer que $u_n \geq 0$, pour tout entier naturel n .

Les termes u_n sont en effet tous positifs : u_0 étant positif, la formule de récurrence ne peut produire ensuite que des résultats positifs.

2/ En calculant $u_{n+1} - 2$ en fonction de $u_n - 2$, montrer que la suite u est majorée par 2.

$u_{n+1} - 2 = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2} - 2 = \dfrac{(3u_n + 2) - 2(u_n + 2)}{u_n + 2} = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 2}$.

Le 1/ permet d'affirmer que $u_n + 2 > 0$, donc $(u_{n+1} - 2)$ et $(u_n - 2)$ sont de même signe et, par récurrence, de celui de $u_0 - 2 = -1 < 0$.

On conclue $u_n - 2 < 0$, soit $u_n < 2$ pour tout entier naturel n . **La suite u est majorée par 2 .**

3/ En calculant $u_{n+1} - u_n$ en fonction de $u_n - u_{n-1}$, montrer par récurrence que la suite u est croissante. Qu'en déduire pour la suite u ?

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2} - \dfrac{3u_{n-1} + 2}{u_{n-1} + 2} = \dfrac{(3u_n + 2)(u_{n+1} - 2) - (3u_{n-1} - 2)(u_n + 2)}{(u_n + 2)(u_{n-1} + 2)} = \dfrac{4\,(u_n - u_{n-1})}{(u_n + 2)(u_{n-1} + 2)}$, ce qui, pour des raisons identiques à celles de la question précédente, prouve que $(u_{n+1} - u_n)$ est du même signe que $(u_n - u_{n-1})$ et, par récurrence, de celui de $u_1 - u_0 = 5/3 - 1 > 0$.

On conclue $u_{n+1} - u_n > 0$, soit $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier naturel n . **La suite u est croissante .**

Toute suite croissante et majorée est convergente , donc la suite u converge vers une limite l .

4/ En passant la relation de récurrence à sa limite, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

$u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 2}$ devient $l = \dfrac{3l + 2}{l + 2}$ en posant $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$, dont on tire $l^2 + 2l = 3l + 2$

$l^2 - l - 2 = 0$, qui admet $l_1 = -1$ et $l_2 = +2$ comme racines.

Seule la racine positive est recevable, puisque les u_n sont positifs.

<u>*Rappel*</u> : Cette méthode ne prouve pas l'existence de la *limite* , mais donne sa valeur lorsque celle-ci existe.