Soit la suite u telle que $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{2}{5} u_n \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

a) Montrer que si u converge, sa limite est $\frac{5}{3}$.

Soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$, limite finie.

En passant la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{5} u_n$ à sa limite, on obtient : $L = 1 + \frac{2}{5} L$, soit $L = \frac{5}{3}$.

Donc, <u>si la suite u converge</u>, ce sera vers $L = \frac{5}{3}$, mais ce calcul ne prouve pas qu'il y ait convergence, car une limite infinie vérifierait également $\infty = 1 + \frac{2}{5} \times \infty$.

b) Soit la suite v telle que $v_n = u_n - \frac{5}{3}$. Montrer que v est géométrique.

On remarquera que v_n mesure l'écart algébrique entre u_n et $\frac{5}{3}$, limite prévue pour cette suite.

Il serait donc logique que v_n converge vers 0.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - \frac{5}{3}}{u_n - \frac{5}{3}} = \frac{(1 + \frac{2}{5} u_n) - \frac{5}{3}}{u_n - \frac{5}{3}} = \frac{\frac{2}{5} u_n - \frac{2}{3}}{u_n - \frac{5}{3}} = \frac{\frac{2}{5}\left(u_n - \frac{5}{3}\right)}{u_n - \frac{5}{3}} = \frac{2}{5} = q\ .$$

Le rapport de deux termes consécutifs de la suite v est constant, donc la suite v est géométrique, de raison $\frac{2}{5}$.

c) En déduire l'écriture de v_n puis de u_n en fonction de n.

v géométrique $\Leftrightarrow$ $v_n = v_0 \,.\, q^n$, soit $v_n = (u_0 - \frac{5}{3}).q^n = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

D'où : $v_n = u_n - \frac{5}{3} \Leftrightarrow u_n = \frac{5}{3} + v_n = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

d) Calculer leurs limites respectives lorsque n tend vers l'infini.

La suite géométrique v, dont la raison vérifie $|\, q \,| < 1$, c'est à dire *divise*, converge comme prévu vers 0.

On en déduit, puisque $u_n = \frac{5}{3} + v_n$, que la suite u converge vers $\frac{5}{3}$, comme prévu également.