Soit f telle que $\begin{cases} f(x) = xe^{1/x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$ **.**

1/ Etudier la continuité de f sur son domaine de définition.

Comme on a posé $f(0) = 0$, f est partout définie sur $\mathbb{R}$.

Si $x \neq 0$, f est la composée de deux fonctions continues, $\frac{1}{x}$ et e^x , et est donc elle-même continue sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

<u>Etudions la continuité de f en 0 :</u>

Il faut distinguer les deux cotés de 0 car, selon le cas, $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ sachant que l'exponentielle a des comportements très différents suivant l'infini concerné.

Si $x \to 0^-$ alors $\frac{1}{x} \to -\infty$ et $e^{1/x} \to 0^+$, donc : $\lim_{x \to 0^-} xe^{1/x} = 0^-$, soit $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$, soit $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$.

La fonction f est continue à gauche en 0 .

Si $x \to 0^+$ alors $\frac{1}{x} \to +\infty$ et $e^{1/x} \to +\infty$, donc : $\lim_{x \to 0^+} xe^{1/x}$ est *indéterminé* de forme $0 \times \infty$.

Levons l'indétermination : On pose $X = \frac{1}{x}$, donc si $x \to 0^+$ alors $X = \frac{1}{x} \to +\infty$.

$\lim_{x \to 0^+} xe^{1/x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X} e^X = \lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$. On déduit : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

La fonction f admet une asymptote verticale $x = 0$ et est **<u>discontinue en</u> 0** ***, malgré sa continuité à gauche en ce point.***

2/ Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition.

Si $x \neq 0$, on sait que $f = e^u \Rightarrow f' = u'.e^u$, d'où $f'(x) = 1.e^{1/x} + x.\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x} = (1 - \frac{1}{x})e^{1/x}$.

$f'(x) = \frac{x-1}{x} e^{1/x}$. La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$.

f ne peut être dérivable en 0 puisque la *continuité* en un point est un *préalable* à la *dérivabilité* en ce point.

On va cependant déterminer le coefficient directeur de la *tangente à gauche* en 0 , puisque f est continue en 0^-.

$f'_g(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0$ (en posant $X = \frac{1}{x}$) .

La tangente à (C) en 0^- est horizontale.

3/ Montrer que f admet la droite $D \mid y = x + 1$ pour asymptote oblique.

On étudie le comportement aux infinis de l'écart entre (C) et (D) , c'est à dire de $E(x) = f(x) - (x + 1)$.

$E(x) = xe^{1/x} - x - 1 = x(e^{1/x} - 1) - 1 = \frac{e^X - 1}{X} - 1$ (en posant $X = \frac{1}{x}$) .

Si $x \to \pm\infty$ alors $X \to 0$, or on sait que $\lim_{X \to 0} \frac{e^X - 1}{X} = \exp'(0) = e^0 = 1$,

donc : $\lim_{x \to \pm\infty} E(x) = 0$, ce qui confirme que $D : y = x + 1$ est asymptote oblique à (C).

4/ Etablir le tableau de variation de f et tracer son graphe (C) .

Il ne reste qu'à étudier le signe de la dérivée $f'(x)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ avec $y = f(1) = e$. Le graphe admet $E\,(1\,;\,e)$ pour extremum.

$f'(x)$ est du signe de $\dfrac{x-1}{x}$, donc de celui du produit $x\,(x-1)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$0\parallel$	$-$	0	$+$	
$y = f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$0\parallel+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$