Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m, les solutions du système $\begin{cases} 2(m+2)x+(m+1)y=1 \\ mx+(m+1)y=m+5 \end{cases}$

On sait que la résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues, équivaut à chercher le point d'intersection de deux droites.

Pour le système $\begin{Bmatrix} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{Bmatrix}$, soit les *déterminants* $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$; $D_x=\begin{vmatrix} \mathbf{c} & b \\ \mathbf{c'} & b' \end{vmatrix}$; $D_y=\begin{vmatrix} a & \mathbf{c} \\ a' & \mathbf{c'} \end{vmatrix}$.

Trois cas sont possibles :

a/ $D \neq 0$: (Droites concourantes - Couple solution $(x\,;y)$ unique $x=\dfrac{D_x}{D}$; $y=\dfrac{D_y}{D}$)

b/ $D=0$, D_x ou $D_y \neq 0$: (Droites strictement parallèles - Aucun couple solution)

c/ $D=D_x=D_y=0$: (Droites confondues - Infinité de couples solutions, ceux vérifiant l'équation de cette unique droite).

Calculons les trois déterminants :

$D=\begin{vmatrix} 2(m+2) & m+1 \\ m & m+1 \end{vmatrix}=2(m+2)(m+1)-m(m+1)=(m+1)(m+4)$

$D_x=\begin{vmatrix} \mathbf{1} & m+1 \\ \mathbf{m+5} & m+1 \end{vmatrix}=(m+1)-(m+1)(m+5)=(m+1)(-m-4)=-(m+1)(m+4)=-D.$

$D_y=\begin{vmatrix} 2(m+2) & \mathbf{1} \\ m & \mathbf{m+5} \end{vmatrix}=2(m+2)(m+5)-m=2m^2+13m+20=(2m+5)(m+4)$ après avoir cherché ses racines et factorisé.

a/ $D \neq 0$: Soit $m \neq -1$ et $m \neq -4$. (Droites concourantes)

Couple solution $(x\,;y)$ unique $x=\dfrac{D_x}{D}=-1$; $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{2m+5}{m+1}$.

***b/* $D=0$: Soit $m=-1$ ou $m=-4$**

<u>1er cas : $m=-1$</u> $D=D_x=0$ et $D_y=-9$ (*Droites strictement parallèles - Pas de couple solution*)

<u>2ème cas : $m=-4$</u> $D=D_x=0$ et $D_y=0$ (*Droites confondues - Infinité de couples solutions*)

Le système devient en effet $\begin{Bmatrix} -4x-3y=1 \\ -4x-3y=1 \end{Bmatrix} \Rightarrow y=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$.

Les couples solutions sont ceux de la forme $\left(x\,;-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}\right)$ pour tout x réel.