Soit une suite u telle que $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{2}{3}$, pour tout entier naturel n .

a) Calculer u_1 , u_2 , u_3 , u_4 .

D'après la *formule de récurrence* proposée :

$u_1 = \frac{1}{3} u_0 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$, $u_2 = \frac{1}{3} u_1 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, $u_3 = \frac{1}{3} u_2 + \frac{2}{3} = \frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$, $u_4 = \frac{1}{3} u_3 + \frac{2}{3} = \frac{10}{27} + \frac{2}{3} = \frac{28}{27}$.

b) Soit la suite v telle que $v_n = u_n - 1$ pour tout n entier naturel.

Montrer que v est une suite géométrique. Calculer sa raison et son premier terme.

$v_n = u_n - 1 \Rightarrow u_n = v_n + 1$ et $u_{n+1} = v_{n+1} + 1$, à reporter dans $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{2}{3}$.

$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{2}{3} \Rightarrow v_{n+1} + 1 = \frac{1}{3}(v_n + 1) + \frac{2}{3}$, soit : $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$.

La suite v est géométrique, de raison $q = \frac{1}{3}$ et premier terme $v_0 = u_0 - 1 = +3$.

c) Calculer v_n puis u_n en fonction de n et leurs limites pour n tendant vers $+\infty$.

v suite géométrique vérifie $v_n = v_0 \,.\, q^n$, soit $v_n = 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \Leftrightarrow v_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

Sachant $u_n = v_n + 1$, on déduit : $u_n = 1 + \frac{1}{3^{n-1}}$.

La suite géométrique v , de raison $q = +\frac{1}{3}$ vérifie $| q | < 1$.

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, ce que confirme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$.

Comme $u_n = v_n + 1$, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = (\lim\limits_{n \to +\infty} v_n) + 1 = +1$.