Soit à résoudre l'équation E : $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$.

1) Vérifier que $x = 0$ ne peut être solution de l'équation.

En remplaçant x par 0 dans (E) , on obtient $1 = 0$, ce qui prouve que $x = 0$ ne peut être solution de (E).

2) Forcer la factorisation de x^2 puis poser $X = \dfrac{x+1}{x}$. Montrer alors que l'équation (E) se ramène à une équation du type $aX^2 + bX + c = 0$ que l'on résoudra.

$X = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow X^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}$, soit : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = X^2 - 2$.

$x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 2x - 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$, puisque $x = 0$ ne peut pas être solution.

$(x^2 + \dfrac{1}{x^2}) + 2(x + \dfrac{1}{x}) - 1 = 0 \Leftrightarrow (X^2 - 2) + 2X - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 + 2X - 3 = 0$.

Les racines sont $X = 1$ et $X = -3$.

3) Terminer la résolution de (E) : En rappelant le changement de variable, on obtient :

$X = 1 \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = x \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$.

On constate que $\Delta = -3$, donc l'équation n'admet pas de solution réelle.

$\boldsymbol{X} = -3 \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = -3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = -3x \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$.

On constate que $\Delta = 5$. Les racines sont $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

$S = \{ \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2} ; \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2} \}$.