Soit $R(O, \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan affine et les points A (1 ; 3) , B (2 ; 1) et C (5 , 2) de ce plan.

a) Quelles sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} \quad , \quad \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} \quad , \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 4\vec{i} - \vec{j} \ .$$

b) Quelles sont les coordonnées des milieux des segments [BC] , [CA] et [AB].

$$A' \text{ milieu de } [BC] \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{2+5}{2} = +\dfrac{7}{2} \\ y_{A'} = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{1+2}{2} = +\dfrac{3}{2} \end{cases} \text{, soit } A'(\frac{7}{2} ; \frac{3}{2}) \ .$$

$$B' \text{ milieu de } [AC] \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B'} = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{1+5}{2} = +3 \\ y_{B'} = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{3+2}{2} = +\dfrac{5}{2} \end{cases} \text{, soit } B'(3 ; \frac{5}{2}) \ .$$

$$C' \text{ milieu de } [AB] \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1+2}{2} = +\dfrac{3}{2} \\ y_{C'} = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{3+1}{2} = +2 \end{cases} \text{, soit } C'(\frac{3}{2} ; 2) \ .$$

c) Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

On cherche les coordonnées du centre de gravité G (isobarycentre) du triangle (ABC) , que l'on sait situé au tiers de chaque médiane (AA') , (BB') , (CC') en partant de leur base.

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OG}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OG}) = \overrightarrow{0}$, soit $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

$$\text{On déduit : } 3\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} \text{ , soit } \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = +\dfrac{8}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = +2 \end{cases} .$$

Les coordonnées de G sont $(+\frac{8}{3} ; +2)$.