

Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} \frac{4}{|x+1|} + \frac{1}{y} = 1 \\ -\frac{2}{y} + \frac{1}{|x+1|} = \frac{5}{2} \end{cases} .$$

Effectuons le changement de variable : $X = \frac{1}{|x+1|}$ et $Y = \frac{1}{y}$.

Le système devient
$$\begin{cases} 4X + Y = 1 \\ X - 2Y = \frac{5}{2} \end{cases} .$$

$$\begin{array}{l} 2L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 8X + 2Y = 2 \\ X - 2Y = \frac{5}{2} \end{array} \right\} . \text{ Par addition, on déduit : } 9X = \frac{9}{2} \Leftrightarrow X = +\frac{1}{2} .$$

Report dans : $4X + Y = 1 \Leftrightarrow 2 + Y = 1 \Leftrightarrow Y = -1$.

D'après le changement de variable :

$$X = \frac{1}{|x+1|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x+1| = 2, \text{ soit } \begin{cases} x+1 = 2 \Leftrightarrow x = -1 \\ x+1 = -2 \Leftrightarrow x = -3 \end{cases} .$$

$$Y = \frac{1}{y} = -1 \Leftrightarrow y = -1 .$$

Il existe deux couples solutions $(x ; y) : \{ (+1 ; -1) , (-3 ; -1) \}$.