Montrer que pour tout entier naturel n non nul :
le polynôme $P(x) = (x-2)^{2n} + (x-1)^n - 1$ est divisible par $(x-1)(x-2)$.

On sait que si un polynôme s'annule en $x = a$, son écriture permet la factorisation de $x - a$.
$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x-a).Q(x)$ où Q est un polynôme de degré inférieur de 1 à celui de P.

$P(1) = (1-2)^{2n} + (1-1)^n - 1 = (-1)^{2n} + 0^n - 1 = [(-1)^2]^n - 1 = 1 - 1 = 0$, ce qui justifie la factorisation de $x - 1$.
$P(2) = (2-2)^{2n} + (2-1)^n - 1 = (0)^{2n} + 1^n - 1 = 1 - 1 = 0$, ce qui justifie la factorisation de $x - 2$.
Le polynôme $P(x)$ est bien divisible par $(x-1)(x-2)$.

Application **: Résoudre $(x-2)^4 + (x-1)^2 - 1 > 0$**

Le polynôme $P(x) = (x-2)^4 + (x-1)^2 - 1$ est de la forme précédemment proposée, pour $n = 2$.
Il accepte donc la factorisation de $(x-1)(x-2)$.
Etant du quatrième degré, on peut affirmer : $P(x) = (x-1)(x-2)(ax^2 + bx + c)$.

Développons les deux écritures de $P(x)$:
$P(x) = (x^2 - 3x + 2)(ax^2 + bx + c) = ax^4 + (b - 3a)x^3 + (2a - 3b + c)x^2 + (2b - 3c)x + 2c$
$P(x) = (x-2)^4 + (x-1)^2 - 1 = (x^2 - 4x + 4)^2 + (x^2 - 2x + 1) - 1 = (x^4 + 16x^2 + 16 - 8x^3 + 8x^2 - 32x) + x^2 - 2x$.
$P(x) = x^4 - 8x^3 + 25x^2 - 34x + 16$.

Identifions ces deux écritures de $P(x)$: (même coefficient pour chaque degré)
$a = 1$; $b - 3a = -8$; $2a - 3b + c = 25$; $2b - 3c = -34$; $2c = 16$ dont l'on tire $a = 1$; $b = -5$; $c = 8$.

L'inéquation proposée se résume à $(x-1)(x-2)(x^2 - 5x + 8) > 0$.
Résolvons $x^2 - 5x + 8 = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac = -7 < 0$. L'équation n'admet pas de racine,
donc $x^2 - 5x + 8$ est toujours positif (signe de a) .

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
x^2-5x+8		$+$	|	$+$	|	$+$	
$\boldsymbol{P(x)}$		**+**	**0**	**–**	**0**	**+**	

D'où : $(x-2)^4 + (x-1)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow S = \,]-\infty\,;\,1[\, \cup \,]\,2\,;\,+\infty[$.