Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{4-x^2}+3 \le 3x+1$.

Le domaine de définition impose : $4-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow (2-x)(2+x) \ge 0 \Leftrightarrow (-x+2)(x+2) \ge 0$.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$-x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
P		**$-$**	**0**	**$+$**	**0**	**$-$**	

$D = [\,-2\,;+2]$. Seules les solutions x telles que $-2 \le x \le +2$ seront acceptées.

Autre Méthode :

$4-x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2 \le 4 \Leftrightarrow |\,x\,| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le x \le +2$.

Il faut isoler la racine afin de ne pas créer de double-produit avec racine carrée lors de la mise au carré :

$\sqrt{4-x^2}+3 \le 3x+1 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} \le 3x-2$.

Le résultat d'une racine, comme $\sqrt{4-x^2}$, étant toujours supérieur ou égal à 0 , cela impose : $3x-2 \ge 0$, soit $x \ge +\dfrac{2}{3}$.

Les solutions acceptables devront vérifier : $+\dfrac{2}{3} \le x \le +2$.

La mise au carré de deux nombres positifs conserve leurs ordres : $0 \le A \le B \Rightarrow A^2 \le B^2$, d'où :

$\sqrt{4-x^2} \le 3x-2 \Rightarrow 4-x^2 \le (3x-2)^2$, soit : $4-x^2 \le 9x^2-12x+4 \Leftrightarrow -10x^2+12x \le 0$.

D'où : $5x^2-6x \ge 0 \Leftrightarrow x(5x-6) \ge 0$.

Sachant $+\dfrac{2}{3} \le x \le +2$, donc $x > 0$, il suffit d'imposer : $5x-6 \ge 0$, soit : $x \ge +\dfrac{6}{5}$.

Conclusion : $S = [\,+\dfrac{6}{5}\,;+2\,]$.