

Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R} : Démarche différente pour chaque exercice.

a) $\sqrt{2x+3} \leq x+1$.

Conditions d'existence :

$$2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}.$$

$x+1 \geq 0$, car le résultat d'une racine doit être positif ou nul, ce qui impose $x \geq -1$.

Domaine de définition : $D =]-1; +\infty[$.

Élevons au carré, ce qui respecte l'ordre des quantités positives :

$$0 \leq A \leq B \Rightarrow A^2 \leq B^2$$

$$2x+3 \leq (x+1)^2 \Leftrightarrow 2x+3 \leq x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2 \geq 2.$$

On sait que : $A^2 \leq B^2 \Leftrightarrow |A| \leq |B|$.

Les carrés respectent l'ordre des tailles des nombres (valeur absolue).

D'où : $x^2 \geq 2 \Leftrightarrow |x| \geq \sqrt{2}$, soit $x \leq -\sqrt{2}$ ou $x \geq +\sqrt{2}$. Seul $x = +\sqrt{2}$ vérifie la condition $x \geq -1$.

$$S = [\sqrt{2}; +\infty[.$$

b) $x+2 < \sqrt{4x+13}$.

Conditions d'existence : $4x+13 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{13}{4}$.

Remarque : Il n'y a pas de condition à imposer à $x+2$ qui doit être inférieur à une racine, donc peut être de signe positif ou négatif.

Cette remarque ne simplifie pas la résolution, car, si la mise au carré conserve l'ordre de nombre positifs, elle a un comportement moins prévisible si l'un des nombres peut être négatif.

Envisageons deux cas :

1) Si $x < -2$

$x+2 < 0$, est nécessairement inférieur à $\sqrt{4x+13}$, qui est positif.

Au vu des conditions d'existence, tout $x < -2$ est solution.

D'où une première zone solution : $S_1 =]-\frac{13}{4}; -2[$.

2) Si $x \geq -2$

$x+2 \geq 0$, d'où : $0 \leq x+2 < \sqrt{4x+13}$, termes tous positifs.

Leur mise au carré conserve les ordres :

$$(x+2)^2 < 4x+13 \Leftrightarrow x^2+4x+4 < 4x+13 \Leftrightarrow x^2 < 9.$$

$$x^2 < 9 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < +3.$$

Ce 2ème cas impose $x \geq -2$, d'où une seconde zone solution : $S_2 = [-2; +3[$.

Conclusion : $S = S_1 \cup S_2 =]-\frac{13}{4}; +3[$.