Solution - Racine Evidente - Troisième Degré - Tableau de Signes - s0207

Résoudre dans IR : $\dfrac{\mathbf{-2x^3 - 3x^2 + 5x + 6}}{\mathbf{3x^2 - 7x - 6}} \geq \mathbf{0}$ **.**

Recherchons les <u>racines du numérateur</u> $N(x)$: Etant du 3ème degré, il faut découvrir une racine évidente.

Or $N(-1) = 0$. On peut donc factoriser $x + 1$, sachant que $\underline{P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - a).Q(x)}$.

La factorisation donne : $-2x^3 - 3x^2 + 5x + 6 = (x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c$.

En identifiant les polynômes, on obtient : $\underline{a = -2}$; $a + b = -3$; $b + c = 5$; $\underline{c = 6}$ d'où : $\underline{b = -1}$

Donc : $-2x^3 - 3x^2 + 5x + 6 = (x + 1)(-2x^2 - x + 6)$

Les racines de $-2x^2 - x + 6 = 0$ s'obtiennent par $\Delta = b^2 - 4ac = 49 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 - 7}{-4} = +\dfrac{3}{2} \\ x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 + 7}{-4} = -2 \end{cases}$.

Les racines sont $x_1 = -1$, $x_2 = +\dfrac{3}{2}$, $x_3 = -2$.

Recherchons les <u>racines du dénominateur</u> $D(x)$:

Les racines de $3x^2 - 7x - 6 = 0$ s'obtiennent par $\Delta = b^2 - 4ac = 121 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7 - 11}{6} = -\dfrac{2}{3} \\ x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7 + 11}{6} = +3 \end{cases}$

Les racines sont $x_4 = -\dfrac{2}{3}$, $x_5 = +3$.

Ces deux derniers polynômes du second degré sont du signe de a à l'extérieur des racines x' et x''.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		-1		$-2/3$		$3/2$		3		$+\infty$
$x + 1$		–	|	–	0	+	|	+	|	+	|	+	
$-2x^2 - x + 6$		–	0	+	|	+	|	+	0	–	|	–	
$3x^2 - 7x - 6$		+	|	+	|	+	0	–	|	–	0	+	
$\boldsymbol{R(x)}$		**+**	**0**	**–**	**0**	**+**	||	**–**	**0**	**+**	||	**–**	

$S = \left] -\infty ; -2 \right] \cup \left[-1 ; -\dfrac{2}{3} \right[\cup \left[+\dfrac{3}{2} ; +3 \right[$.