## Principe du Raisonnement par Récurrence :

*Soit une proposition de récurrence $P(n)$*

Exemple : $P(n)$ dit que « $3^n - 1$ est un nombre pair » , pour tout $n$ entier naturel.

a) ***Initialisation*** : **On vérifie que $P(n)$ est vraie, pour une valeur de $n$ (en général 0 ou 1).**

$P(1)$ est vraie car $3^1 - 1 = 3 - 1 = 2$ , est un nombre pair.

b) ***Hérédité*** : **On suppose $P(k)$ vraie et on vérifie qu'alors $P(k+1)$ est vraie, pour tout $n$ entier naturel.**

$P(k)$ supposé vraie $\Leftrightarrow$ $3^k$ - 1 est un nombre pair $\Leftrightarrow$ $3^k - 1 = 2t$ avec $t \in \mathbb{N}$ .

Alors : $3^{k+1} - 1 = 3(3^k - 1) + 2 = 3(2t) + 2 = 2(2t + 1) = 2t'$ , avec $t' \in \mathbb{N}$ .

Donc, SI $P(k)$ est vraie ($3^k - 1 = 2t$ avec $t \in \mathbb{N}$), ALORS $P(k+1)$ est vraie ($3^{k+1} - 1 = 2t'$ avec $t' \in \mathbb{N}$.

c) ***Conclusion*** : **Sachant $P(1)$ vraie, de proche en proche, on déduit $P(n)$ vraie , pour tout $n$ entier naturel.**

$P(1)$ vraie $\Rightarrow$ $P(2)$ vraie $\Rightarrow$ $P(3)$ vraie $\Rightarrow$ …….. $\Rightarrow$ $P(n)$ vraie $\Rightarrow$ $P(n+1)$ vraie $\Rightarrow$ ……

## Raisonnement par récurrence généralisé (variante) :

La différence se situe au niveau de l'hérédité (cœur de la démonstration par récurrence) :

b) *Hérédité* : **On suppose {$P(1)$, $P(2)$, … $P(k)$} vraies, et on vérifie que $P(k+1)$ est vraie.**

*Dans l'initialisation, il faut adapter le nombre de 1ers termes connus, aux exigences de la proposition de récurrence $P(n)$ .*

*Exemple* : Soit la suite $u$ définie par $u_0 = 1$ , $u_1 = \frac{4}{3}$ et , pour tout entier naturel $n$ , par $u_{n+2} = \frac{5}{3}u_{n+1} - \frac{4}{9}u_n$ .

Montrer par récurrence que $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ pour tout entier naturel $n$ . Soit la proposition de récurrence $P(n)$ : «$u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$ »

*La formule de récurrence est à 2 termes (connaissance de $u_n$ et $u_{n+1}$ pour calculer $u_{n+2}$ .*

a) ***Initialisation*** : $P(0)$ vraie, car $u_0 = 1 = \left(\frac{4}{3}\right)^0$ et $P(1)$ vraie, car $u_1 = \frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^1$ .

b) ***Hérédité*** : Supposons $P(k)$ vraie ( $u_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k$ ) et $P(k+1)$ vraie ($u_{k+1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{k+1}$ .

Peut-on en déduire $P(k+2)$ vraie ? : $u_{k+2} = \frac{5}{3}u_{n+1} - \frac{4}{9}u_n = \frac{5}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{k+1} - \frac{4}{9}\left(\frac{4}{3}\right)^k = \frac{20}{9}\left(\frac{4}{3}\right)^k - \frac{4}{9}\left(\frac{4}{3}\right)^k = \frac{16}{9}\left(\frac{4}{3}\right)^k = \left(\frac{4}{3}\right)^{k+2}$

c) ***Conclusion*** : $P(n)$ est vraie pour tout entire naturel $n$ .

***Récurrence*** : [Cours] [Fiche résumé 1] [Fiche résumé 2] (Site Paul MILAN)

***Exemples*** :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Enoncé 1 | Enoncé 2 | Enoncé 3 | Enoncé 4 |
| Corrigé 1 | Corrigé 2 | Corrigé 3 | Corrigé 4 |