Vocabulaire – Probabilités Discrètes

Expérience E : Opération soumise à probabilité (Ex. Tirer une carte d'un jeu de 32)

Univers Ω de l'expérience E : Ensemble des N *issues* (résultats élémentaires) de E.

(Ex. Chacun des $N = 32$ tirages possibles de 1 carte dans le jeu)

Evènement A : Situation réalisable ou non dans l'expérience E (Ex. tirer un roi)

***Sous-Univers* A** de l'évènement A : Ensemble des n *issues* de E qui réalisent A.

(Ex. Il existe n = 4 tirages possibles de 1 carte dans le jeu qui réalisent A)

Probabilité p de A dans l'expérience E : $p = p(A) = \dfrac{n}{N} = \dfrac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{\text{nbre d'issues } \textit{favorables} \text{ à } A}{\text{nbre d'issues } \textit{possibles} \text{ dans } E}$.

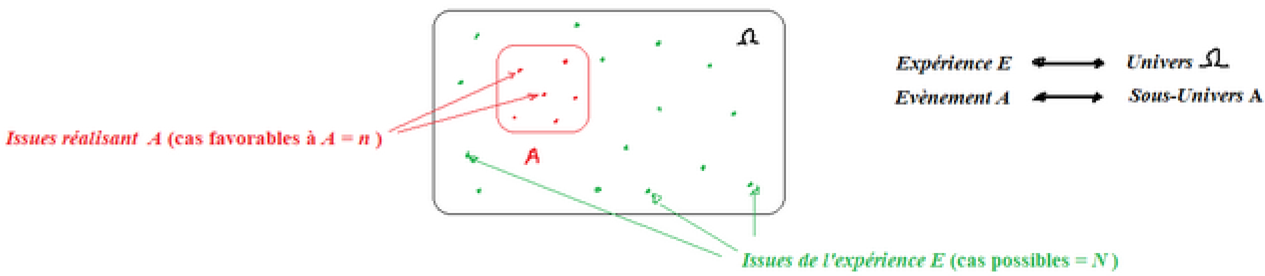
<u>Exemple</u> : *Soit un classique jeu de 32 cartes, toutes différentes.*
4 couleurs : 8 trèfles, 8 carreaux, 8 cœurs, 8 piques.
Chaque couleur contient : 1As, 1 Roi, 1 Dame, 1 Valet, 1« 10 », 1 « 9 », 1 « 8 », 1 « 7 ».
On tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir un Roi ?

Expérience E : Tirage d'une carte parmi 32 différentes.
Univers Ω : Ensemble des $N = 32$ issus (tirages possibles).
Evènement A : Obtenir un Roi.
Sous-Univers A *de l'évènement A* : $n = 4$ issues (tirages de roi) {Roi de Trèfle, Roi de Carreau, Roi de Cœur, Roi de Pique}.
Probabilité p de A dans l'expérience E : $p = p(A) = \dfrac{n}{N} = \dfrac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$ (soit 12,5% des tirages possibles).

$\dfrac{n}{N} = \dfrac{n(\mathrm{A})}{n(\Omega)} = \dfrac{\text{nombre d'issues \underline{favorables} à } A}{\text{nombre d'issues \underline{possibles} dans } E} = \dfrac{4}{32}$. *<u>Grave erreur courante</u> : Répondre* $p = \dfrac{1}{4}$ (1 Roi parmi 4 possibles).

<u>Remarque</u> : Ne pas confondre les notations A et A *, ou $p(A)$ et $p(\mathrm{A})$, E et Ω .*
Ce n'est pas bien grave, et quand on le sait, il n'y a pas de souci à noter $p(\mathrm{A})$ au lieu de $p(A)$.

$p(\mathrm{A})$ ne veut rien dire, on parle de la probabilité d'un évènement A, et non pas d'un ensemble d'issues A .
de même, $n(A)$ n'est pas correct, alors que $n(\mathrm{A})$ l'est, nombre d'éléments du sous-univers A *des issues qui réalisent A , <u>cas favorables</u> à A .*



$p(A) = \dfrac{n}{N}$ *, proportion d'issues favorables à A parmi les issues possibles dans E .*

Définitions – Propriétés

$0 \leq p \leq 1$ et $\begin{cases} p = 0 \Leftrightarrow A \text{ évènement } \textit{impossible} \text{ dans } E \\ p = 1 \Leftrightarrow A \text{ évènement } \textit{certain} \text{ dans } E \end{cases}$.

Evènement Contraire $\overline{A}$ ***de A*** (Toutes les issues de Ω qui ne réalisent pas A) : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Evènement « A <u>et</u> B » ($A \wedge B$) : Réaliser <u>dans une même issue</u>, simultanément, les évènements A et B.

Sous-Univers $A \cap B$ de l'évènement $A \wedge B$.

Evènement « A <u>ou</u> B » ($A \vee B$) : Réaliser <u>dans une même issue</u> <u>au moins un des deux évènements</u> A ou B.

Sous-Univers $A \cup B$ de l'évènement $A \vee B$ (« *ou* » *non exclusif*. A et B peuvent être réalisés simultanément).

<u>*Précisions*</u> : <u>*Loi des Probabilités Totales ou Loi des Nœuds*</u>

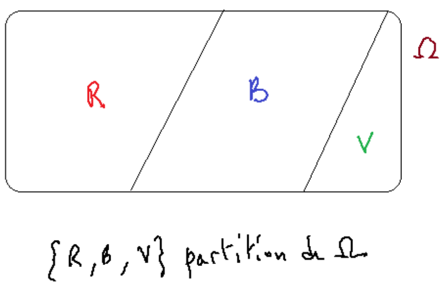
Tout évènement qui se résume à des sous-évènements incompatibles entre eux, couvrant toutes les éventualités de cet évènement, donc tel que l'univers A *est décomposable en une* <u>*partition*</u> *de sous-univers de réunion* A, *et d'intersections vide deux à deux, vérifie la loi des Probabilités Totales suivante :*

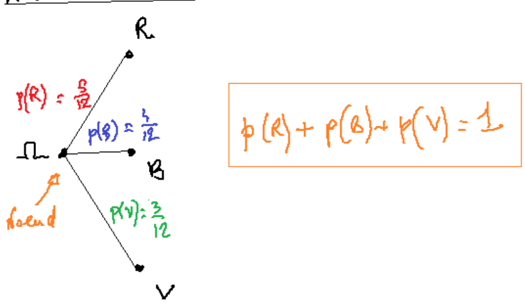
$$\mathbf{A = B \cup C \cup D,\ B \cap C = \varnothing,\ B \cap D = \varnothing,\ C \cap D = \varnothing} \ \Rightarrow\ p(A) = p(B) + p(C) + p(D)$$

Cas particulier : **Si $B \cup C \cup D = \Omega$, alors** $p(B) + p(C) + p(D) = 1$ (100% des éventualités)

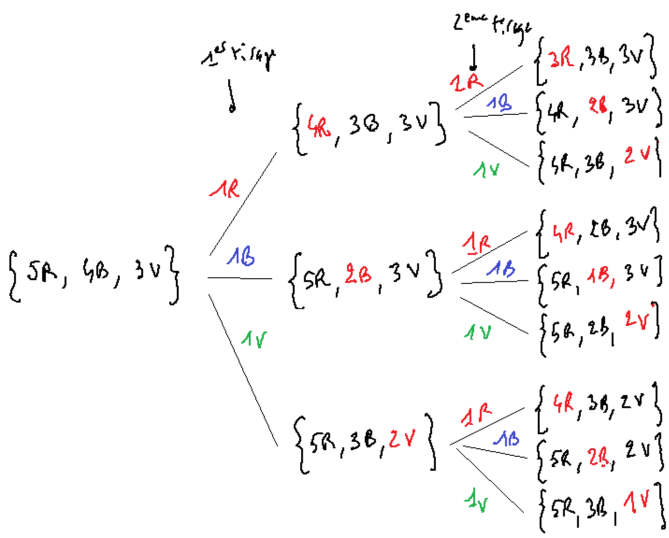
<u>*Exemple 1*</u> : *Une urne contient* 12 *boules,* 5 *Rouges,* 4 *Bleues,* 3 *Vertes.*
On extrait 1 *boule de l'urne.*
Soit R *l'évènement « la boule tirée est Rouge »*, B *l'évènement « elle est Bleue »*, V *« elle est Verte »*
{R , B , V} forment une partition de $\Omega \Rightarrow p(R) + p(B) + p(V) = 1$.

Arbre de décision

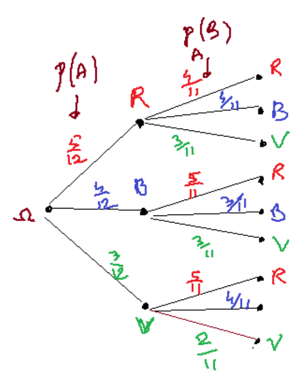




<u>*Exemple 2*</u> : *Même expérience, en tirant successivement* 2 *boules, sans remise entre chaque tirage.*



$p_A(B)$ probabilité de réaliser B au 2ème tirage sachant A réalisé au 1er tirage



Rappel

Toujours vrai : $p(A \vee B) + p(A \wedge B) = p(A) + p(B)$

Evènements A et B Incompatibles **dans** *E*

$A \wedge B$ évènement impossible $\Leftrightarrow$ $p(A \wedge B) = 0$, soit $p(A \vee B) = p(A) + p(B)$.

Rappel : Loi des Probabilités Totales

Si $\{A_1 ; A_2 ; \ldots ; A_n\}$ forment une partition de Ω, alors $p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n) = 1$.

Une partition de Ω signifie que $A_i \cap A_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$, et $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Evènements traités successivement dans une même expérience, ou dans des expériences différentes

$p(A \wedge B) = p(A) \times p_A(B)$ avec $p_A(B)$ la probabilité de l'évènement B sachant A déjà réalisé, aussi notée $p(B/A)$.

$p_{(E1\,;\,E2)}(A\,;\,B) = p_{E1}(A) \times p_{E2}(B/A)$, en cas d'expériences multiples.

Formule de Bayses - Probabilité inversée

$$p(A \wedge B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A) \Rightarrow p_B(A) = \frac{p(A \wedge B)}{p(B)} = \frac{p(A) \times p_A(B)}{p(B)} .$$

Evènements indépendants dans une même expérience, ou dans des expériences différentes

A et B indépendants dans l'expérience E $\Leftrightarrow p_B(A) = p(A) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B) \Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

A , B incompatibles $\Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$: $\cup$ **(ou) incompatibles = +**

A , B indépendants $\Rightarrow p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$: $\cap$ **(et) indépendants = ×**

<u>Exemple</u> : *Dans une classe de* TG , 60 % *des élèves sont des Garçons* (G), *pour* 40 % *de Filles* (F).

Parmi les garçons, 75 % *des élèves ont choisi l'option Spécialité Maths* (M), 25 % *une autre Spécialité* ($\overline{M}$).

Parmi les filles, 65 % *des élèves ont choisi l'option Spécialité Maths* (M), 35 % *une autre Spécialité SVT* ($\overline{M}$).

On choisit un élève au hasard. Calculer les probabilités suivantes :
$p(G \cap M)$, $p(M)$, $p_M(F)$ *probabilité, sachant que l'élève fait des Maths, qu'il s'agisse d'une Fille.*

$p(G) = 0{,}60$, $p(F) = 0{,}40$, $p(G \cap M) = p(G) \times p_G(M) = 0{,}60 \times 0{,}75 = 0{,}45$.
Dans cette classe de TG, il y a 45 % *des élèves qui, simultanément, sont des garçons et ont choisi la Spécialité Maths.*

$p(F \cap M) = p(F) \times p_F(M) = 0{,}40 \times 0{,}65 = 0{,}26$.
Dans cette classe de TG, il y a 26 % *des élèves qui, simultanément, sont des filles et ont choisi la Spécialité Maths.*

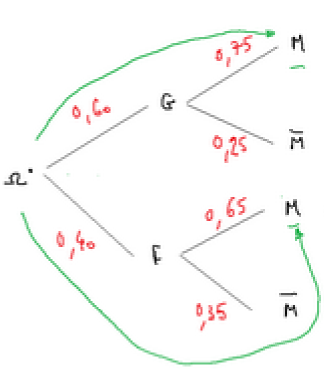
$M = (G \cap M) \cup (F \cap M)$ *réunion de deux <u>évènements incompatibles</u>, donc :* $p(M) = p(G \cap M) + p(F \cap M)$.
$p(M) = 0{,}45 + 0{,}26 = 0{,}71$.
Dans cette classe de TG, 71 % *des élèves ont choisi la Spécialité Maths.*

Pour calculer $p_M(F)$, *il faut faire une probabilité inversée, Formule de Bayses, car les informations de l'énoncé sont données dans l'ordre 1-Sexe , 2-Spécialité.*

$$p(F \cap M) = p(M \cap F) \Rightarrow p(F) \times p_F(M) = p(M) \times p_M(F) \Rightarrow p_M(F) = \frac{p(F \cap M)}{p(M)} = \frac{0{,}26}{0{,}71} = \frac{26}{71} = 0{,}366 .$$

Dans cette classe de TG, 36,6 % *des élèves qui ont choisi la Spécialité Maths, sont des Filles*

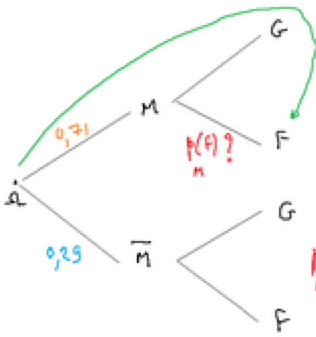
Nous allons retrouver ces résultats après présentation de l'arbre de décision, puis par deux tableaux à double entrée, en pourcentage, et en effectif.



$p(G\cap M) = 0,60 \times 0,75 = 0,45$

$p(M) = 0,45 + 0,26 = 0,71$

$p(F\cap M) = 0,40 \times 0,65 = 0,26$



$p_M(F)$?

$p(M\cap F) = p(F\cap M) = 0,26$

$p(M) \times p_M(F)$

$p_M(F) = \dfrac{0,26}{0,71} = 0,366$

	M	$\overline{M}$	
G	0,60×0,75 0,45	0,15	0,60
F	0,40×0,65 0,26	0,14	0,40
	0,71	0,29	1

probabilités marginales

$p_M(F) = \dfrac{0,26}{0,71} = 0,366$

2 critères { sexe / spécialités

100 × 100 = 10.000 élèves

	M	$\overline{M}$	
G	4500	1500	6.000
F	2600	1400	4.000
	7100	2900	10.000

on évite les décimales { 100×100 élèves / 100×45 = 4500 G∩M

$p_M(F) = \dfrac{2600}{7100} = 0,366.$