Etudes et Réflexions.

Soit la fonction f définie pour tout x réel par $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

1/ Préciser son domaine de définition, sa parité, ses limites aux bornes de ce domaine.

2/ Etudier la dérivabilité de f en $x = 0$. Donner les équations des tangentes en ce point.

3/ Calculer la dérivée $f'(x)$ et établir le tableau de variation de la fonction f .

4/ Tracer dans un repère orthonormé du plan la courbe représentative C de la fonction f, et les deux tangentes en $x = 0$.

5/ Soit la suite u telle que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

A l'aide des positions relatives de C et de la tangente en $x = 0$ sur $[0 ; +\infty[$, conjecturer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

La démonstration de la conjecture est délicate.