On considère la suite numérique v telle que, pour tout entier naturel n , on ait $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n} \end{cases}$.

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour tout entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n .
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel, en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
 	
Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
  v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme
	Variables :
	v est un réel
	i et n sont des entiers naturels
	
	Début de l'algorithme :
	Lire n
	Pour i variant de 1 à n faire
	v prend la valeur 1
	  Afficher v
	v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$
	Fin pour
	Fin algorithme
		Variables :
		v est un réel
		i et n sont des entiers naturels
		
		Début de l'algorithme :
		Lire n
		v prend la valeur 1
		Pour i variant de 1 à n faire
		  Afficher v
		v prend la valeur $\frac{9}{6-v}$
		Fin pour
		Fin algorithme

2. Pour n = 100 on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour n = 100, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3 – a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel : $0 < v_n < 3$.

b) Démontrer que, pour tout n entier naturel : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

c) La suite est-elle monotone ?

d) La suite est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

4. On considère la suite w telle que, pour tout n entier naturel : $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

a) Démontrer que w est une suite arithmétique, de raison $r = -\dfrac{1}{3}$.

b) En déduire l'expression de w_n et v_n en fonction de n .

c) Retrouver à partir de ces résultats la valeur de $L = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.