

On considère un entier n qui n'est pas un carré parfait (c'est-à-dire qui n'est pas le carré d'un autre entier).

1/ Justifier que dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers, il existe un nombre premier p dont l'exposant est impair.

2/ On suppose que \sqrt{n} est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe des entiers naturels a et b , avec $b \neq 0$, tels que $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$.

- a) Quel est la parité de l'exposant de p dans la décomposition de nb^2 ?
- b) Quelle est la parité de tous les exposants dans la décomposition de a^2 ?
- c) Que dire de l'égalité $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$?

3/ Énoncer la propriété que l'on vient de montrer.