Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A

Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

> Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$, il existe un unique réel strictement positif u_α tel que $P(-u_\alpha \le X \le u_\alpha) = 1 - \alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ par $H(x) = P(-x \le X \le x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt$.

1/ Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?

2/ Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3/ A l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel x positif, $H(x) = 2\int_{0}^{x} f(t)\,dt$.

4/ En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $[0\,;+\infty[$ est la fonction $2f$, et dresser le tableau de variations de la fonction H sur $[0\,;+\infty[$.

5/ Démontrer alors le théorème énoncé.

Partie B

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.

60% des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6% des pipettes de cette entreprise possèdent un défaut.

Dans le stock total du laboratoire, 5% des pièces présentent un défaut.

On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

A l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;

B l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;

D l'évènement : « La pipette a un défaut ».

1/ La pipette choisie au hasard présente un défaut ; quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'entreprise A ?

2/ Montrer que $p(B \cap D) = 0{,}0224$.

3/ Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, quel pourcentage de pipettes présente un défaut ?

Partie C

Une pipette est dite conforme si sa contenance est comprise, au sens large entre 98 millilitres (mL) et 102 mL.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque pipette prise au hasard dans le stock d'un laboratoire associe sa contenance (en mL).

On admet que X suit une loi normale de moyenne μ et écart type σ tels que $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1{,}0424$.

1/ Quelle est alors la probabilité, à 10^{-4} près, pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme ?

(On pourra s'aider de la table ci-dessous ou utiliser une calculatrice).

Contenance x (en mL)	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**
$P(X \le x)$ arrondi à 10^{-5}	0,00000	0,00004	0,00165	0,02506	0,16368
Contenance x (en mL)	**100**	**101**	**102**	**103**	**104**
$P(X \le x)$ arrondi à 10^{-5}	0,5	0,83632	0,97494	0,99835	0,99996

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0{,}05$.

2/ On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n , où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100 .

On suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.

Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.

a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y_n ?

b) Vérifier que $n > 30$, $np > 5$ et $n(1 - p) > 5$. Quelle en est la conséquence ?

c) Donner en fonction de n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon.

d) Sur un lot de 1.600 pipettes, on dénombre 12 pipettes non conformes. Qu'en conclure ?