

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité de l'ensemble des matrices d'ordre 3.

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1/ On pose $B = A - I$. Calculer B^2 et B^3 .

2/ On souhaite calculer $A^n = (B + I)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer $(B + I)^n$? Justifier la réponse.

b) Démontrer que pour tout $n \geq 3$, on a $A^n = (B + I)^n = \binom{n}{0} I + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$.

En déduire l'expression de A^n pour tout $n \geq 3$.