Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$.

On note A_n le point du plan d'affixe z_n .

1/ Calculer z_1 , z_2 , z_3 , z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.

Placer les points A_0 , A_1 , A_2 , A_3 et A_4 sur une figure.

2/ Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

3/ A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4-a) Etablir que, pour tout entier naturel n , $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$.

En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1} .

b) Pour tout entier naturel n , on note L_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots. A_{n-1}A_n$.

On a ainsi : $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

Exprimer L_n en fonction de n .

Déterminer la limite de la suite (L_n) .