Rappel :

Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7 , et on écrit $a \equiv b$ [7] lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1/ *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances* :

a) Soient a , b , c des entiers relatifs.

Démontrer que : Si $a \equiv b$ [7] et $c \equiv d$ [7] , alors $ac \equiv bd$ [7] .

b) En déduire que : Si a et b sont des entiers relatifs non nuls, si $a \equiv b$ [7] , alors $a^n \equiv b^n$ [7] , pour tout entier naturel n .

2/ Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier relatif n non nul tel que $a^n \equiv 1$ [7] .

3/ Soit a un entier naturel non divisible par 7 .

a) Montrer que $a^6 \equiv 1$ [7] .

b) On appelle *ordre* de a mod 7 (modulo) , noté k , le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1$ [7] .

Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1$ [7] .

En déduire que k divise 6 .

Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c) Donner l'*ordre* mod 7 de tous les entiers compris entre 2 et 6 .

4/ A tout entier naturel n , on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.

Montrer que $A_{2006} \equiv 6$ [7] .